

# VERS UN INTERFÉROMÈTRE À ATOMES GUIDÉS

(Rapport du stage du DEA de Physique Quantique)

Zoltán KURUCZ

Directrice du stage:

Isabelle BOUCHOULE  
Institut d'Optique Théorique et Appliquée  
Laboratoire Charles Fabry, Orsay

6 mai 2002

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2 Propagation d'atomes dans un guide</b>	<b>4</b>
2.1 Approche semi-classique pour la propagation . . . . .	4
2.2 Conditions d'adiabaticité . . . . .	8
<b>3 Interaction entre atomes</b>	<b>10</b>
3.1 Conséquences de la diffusion de phase . . . . .	10
3.2 Effet d'interactions lors de la propagation . . . . .	16
3.2.1 Point de vue des particules . . . . .	16
3.2.2 Approche optique quantique . . . . .	17
<b>4 Conclusions</b>	<b>23</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>24</b>

# 1. Introduction

Les interféromètres sont largement utilisés en métrologie et en science fondamentale. En effet, grâce à l'interférence d'ondes se propageant le long de chemins différents, des petits changements peuvent être mesurés avec une grande précision. Ainsi, un interféromètre optique peut mesurer de petits changements d'indice par exemple. Des rotations peuvent aussi être mesurées précisément par interférométrie. Suite à la dualité onde/particule de la mécanique quantique, des interférences sont aussi réalisables avec des atomes, des neutrons ou des électrons. Et dans plusieurs domaines, par exemple l'observation des effets inertiels, la sensibilité des interféromètres à ondes de matière est potentiellement plus grande que celle des interféromètres à ondes lumineuses [1]. Des gyroscopes et des gravimètres à atomes froids ont déjà été réalisés. Dans ces interféromètres, le mouvement des atomes entre les séparatrices est libre. Le progrès récent dans le piégeage et le guidage d'atome permet d'envisager la réalisation d'interféromètres à atomes guidés. En particulier, le guidage d'atomes au-dessous d'une puce dans des micro-structures magnétiques semble prometteur.

Dans ce rapport, nous étudions certains aspects de la réalisation d'un interféromètre à atomes guidés. Un guide peut être réalisé, par exemple, à l'aide de fils conducteurs parcourus par des courants électriques [2]. Une lame séparatrice peut être réalisée à l'aide d'une bifurcation de guide [3,4]. Un couplage tunnel entre guides peut aussi réaliser les séparatrices [4]. Pour la réalisation d'un interféromètre, la cohérence doit être préservée lors de la propagation. En particulier, les modes transverses excités ne doivent pas être peuplés. Dans la première partie de ce rapport, nous proposons un formalisme pour décrire la propagation des atomes guidés. Nous réalisons une approximation de type WKB, et nous dérivons une condition pour que l'atome suive adiabatiquement l'état fondamental du mouvement transverse.

Le but d'une mesure interférométrique est de déterminer une différence de phases accumulée entre les deux bras de l'interféromètre. Cette mesure est perturbée par la présence d'interactions entre atomes. En effet, la phase du condensat ne reste pas bien définie lors de l'évolution : c'est le phénomène de diffusion de phase [5,6]. Or, dans un interféromètre à atomes guidés, le confinement peut être suffisant pour engendrer des interactions importantes. La fin de ce rapport est consacrée à l'effet des interactions sur l'interféromètre.

La section 3.1 traite le problème de la diffusion de phase dans un expérience interférométrique utilisant un condensat entier. On montre la présence de collapses et de résurgences dans le rapport signal/bruit de l'interféromètres. Les résultats similaires ont été obtenus dans la littérature [7]. On présente aussi une méthode interférométrique utilisant les interactions pour séparer les états de nombre d'atomes total pair et impair.

Dans la section 3.2, on étudie le bruit de phase dans un flux continu d'atomes. En appliquant aux atomes guidés les outils d'optique quantique développés pour rendre compte de l'effet Kerr, on montre dans un modèle avec détection homodyne, que l'interaction entre atomes introduit un excès de bruit de la phase qui, avec les approximations faites, reste un bruit blanc.

## 2. Propagation d'atomes dans un guide

Dans ce chapitre, on étudie le comportement d'un seul atome se propageant dans un guide. Le guide est un potentiel piégeant, où l'atome est confiné à 2D (plan transverse), tandis que son mouvement selon le troisième axe (direction longitudinale) est libre. Dans la section 2.1, on suppose que l'atome a une certaine impulsion longitudinale, et on développe une approximation de type WKB. La section 2.2 discute la condition d'adiabaticité, c'est à dire, la condition pour que les modes excités du mouvement transverse ne soient pas peuplés au cours de la propagation.

Avant de rentrer dans les calculs, il est indispensable de donner un exemple simple de guidage magnétique emprunté à la bibliographie. Considérons un atome de moment cinétique  $J$  dans un champ magnétique  $B$  dirigé selon  $y$ : ses niveaux Zeeman  $|m\rangle$  acquièrent l'énergie  $m\mu B$ . Un atome, dont le moment magnétique  $m$  suit adiabatiquement la direction du champ magnétique, ressent donc un potentiel  $V(\mathbf{r}) = -m\mu|B(\mathbf{r})|$ . Si la norme du champ a un minimum, les atomes polarisés selon  $m < 0$  sont alors soumis à un potentiel confinant.

Pour avoir un guide, le champ magnétique doit être préparé de telle façon qu'il forme un puits à deux dimensions  $(x, y)$ . Une telle configuration peut être réalisée à l'aide de deux fils conducteurs parallèles à l'axe  $z$  parcourus par des courants électriques de sens opposés comme montré par la figure 2.1 [2,8]. En rajoutant un champ externe  $B_{\text{ext}}$  selon  $y$ , on peut annuler le champ le long d'une ligne au-dessus des fils. Cette ligne représente le centre du guide. Le guidage d'atomes le long d'un tel guide a été démontré expérimentalement y compris en présence de courbe du guide et une séparation en Y [3,9]. Ces progrès permettent d'envisager la réalisation d'un interféromètre à atomes guidés (fig. 2.2).

### 2.1 Approche semi-classique pour la propagation

On s'intéresse ici à la propagation le long d'un guide. En général, si le potentiel est séparable, c'est-à-dire si  $V(x, y, z) = V_{\perp}(x, y) + V_{\parallel}(z)$ , alors les fonctions d'onde

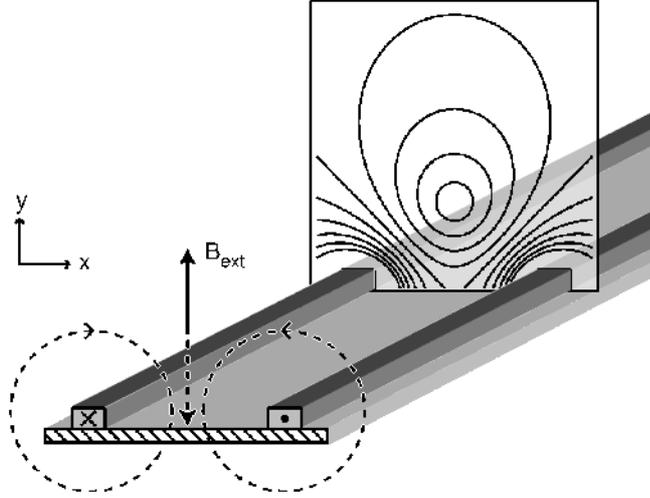


FIG. 2.1: Guide magnétique avec deux fils conducteurs parcourus par des courants de sens opposé. Le champ créé par les fils est tracé au pointillé en avant, les contours de potentiel créé par les fils et le champ externe est marqué en arrière.

propres du système se factorisent selon  $\Psi(x, y, z) = \varphi(x, y)\zeta(z)$ , avec

$$\left(\frac{1}{2m}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + V_\perp\right)\varphi = E_\perp\varphi \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{2m}\partial_z^2 + V_\parallel\right)\zeta = E_\parallel\zeta. \quad (2.1)$$

Le spectre du mouvement transverse a une partie discrète correspondante aux modes de piège transverse ( $\varphi_n(x, y)$ ). La propagation (transmission ou réflexion) décrite par  $\zeta$  ne change pas les modes transverse dans ce cas.

Cependant, de tels potentiels ne décrivent pas le guidage le long de courbes. Ils ne peuvent pas non plus décrire la séparation d'un guide en deux ou le rapprochement de deux guides. Or ces éléments sont essentiels pour la réalisation d'un

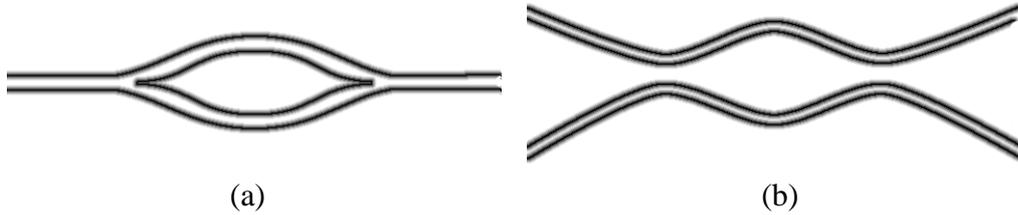


FIG. 2.2: (a) Deux séparatrices en Y mises face à face. (b) Deux séparatrices en X jointes l'une après l'autre. Ces arrangements des fils permet de séparer la fonction d'onde d'un atome, et de recombina ensuite les deux parties. C'est le principe de l'interféromètre à atomes guidés.

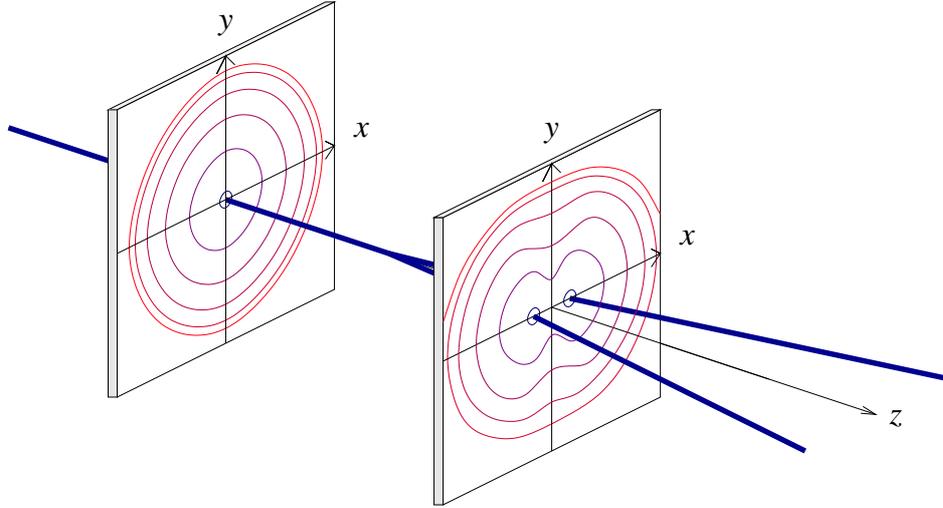


FIG. 2.3: Une séparatrice en Y. Les atomes sont guidés le long des lignes en gras. Les coupes donnent les équipotentielles dans des plans transverses. Des configurations similaires ont été réalisées [10,4], et ont permis de séparer en deux un jet d'atomes [3].

interféromètre. Nous devons donc considérer le cas d'un potentiel non séparable : le potentiel transverse  $V_z(x, y)$  dépendent de  $z$  comme par exemple sur la figure 2.3. Les fonctions propres du mouvement transverse sont supposées connues pour chaque  $z$  :

$$\left( \frac{1}{2m} (\partial_x^2 + \partial_y^2) + V_z \right) |\varphi_n(z)\rangle = \varepsilon_n(z) |\varphi_n(z)\rangle. \quad (2.2)$$

N'importe quel état du système se décompose dans cette base avec des coefficients dépendants de  $z$  :

$$\Psi(x, y, z) = \sum_n c_n(z) \varphi_n(x, y; z). \quad (2.3)$$

On cherche un état stationnaire d'énergie  $E$  :

$$\left( \frac{1}{2m} (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) + V \right) |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle. \quad (2.4)$$

Posons

$$k_n^2(z) \equiv 2m(E - \varepsilon_n(z)), \quad (2.5a)$$

$$D_{nm}(z) \equiv \langle \varphi_n(z) | \frac{d}{dz} | \varphi_m(z) \rangle, \quad (2.5b)$$

$$D_{nm}^{(2)}(z) \equiv \langle \varphi_n(z) | \frac{d^2}{dz^2} | \varphi_m(z) \rangle. \quad (2.5c)$$

L'équation de Schrödinger (2.4) donne pour les coefficients  $c_n$  définis par équation (2.3) les équations couplées

$$k_n^2(z)c_n(z) + \frac{d^2}{dz^2}c_n(z) + 2\sum_m D_{nm}(z)\frac{d}{dz}c_m(z) + \sum_m D_{nm}^{(2)}(z)c_m(z) = 0. \quad (2.6)$$

Remarque : On a à priori la liberté de choisir la phase des états  $|\varphi_n(z)\rangle$  pour chaque  $z$  dans la forme (2.3). Cependant, pour que les coefficients  $c_n$  soient continus et deux fois dérivables, et pour que l'on puisse définir  $D_{nm}$  et  $D_{nm}^{(2)}$ , la phase des états  $|\varphi_n(z)\rangle$  doit vérifier certaines conditions. Par exemple, si  $|\varphi_n(z)\rangle$  est une bonne base, quelle que soient les fonctions réelles dérivables  $f_n(z)$ ,  $|\psi_n(z)\rangle \equiv e^{if_n(z)}|\varphi_n(z)\rangle$  est aussi une bonne base. Pour éviter de telles oscillations non pertinentes des coefficients  $c_n$ , on peut toujours choisir les phases pour que  $|\varphi_n(z)'\rangle$  soit orthogonal à  $|\varphi_n(z)\rangle$ . (Le prime (') représente la dérivée selon  $z$ .) Si tous les modes transverses sont non dégénérés, en appliquant les formules de la théorie des perturbations, on déduit que le changement  $|\varphi_n(z)'\rangle \delta z$  de l'état  $|\varphi_n(z)\rangle$  dû au changement  $V'\delta z$  de hamiltonien vérifie

$$|\varphi_n'\rangle = \sum_{k \neq n} \frac{\langle \varphi_k | V' | \varphi_n \rangle}{\varepsilon_n - \varepsilon_k} |\varphi_k\rangle. \quad (2.7)$$

L'élément de matrice  $D_{nm}$  s'écrit donc

$$D_{nm} = \langle \varphi_n | \varphi_m' \rangle = \frac{\langle \varphi_n | V' | \varphi_m \rangle}{\varepsilon_m - \varepsilon_n} = -D_{nm}^*. \quad (2.8)$$

Si les mouvements transverse et longitudinal sont indépendants,  $D_{nm} = D_{nm}^{(2)} = 0$ . Les équations du mouvement (2.6) se simplifient alors, pour chaque  $c_n$ , aux équations de Schrödinger ordinaires. Pour des potentiels variant suffisamment lentement et une énergie cinétique suffisante, les  $c_n$  peuvent alors être représentés par l'approximation WKB. Dans le cas général, où  $D_{nm}$  et  $D_{nm}^{(2)}$  sont à priori différents de 0, on se laisse guider par la solution précédente en cherchant la solution sous la forme

$$c_n(z) \equiv \frac{A_n(z)}{\sqrt{k_n(z)}} \exp i \int_0^z k_n(z') dz'. \quad (2.9)$$

On suppose maintenant que l'échelle spatiale de variation du potentiel est très supérieure à  $1/k_n$ , donc

$$|D_{nm}^{(2)}| \ll |k_n D_{nm}|. \quad (2.10)$$

En gardant le couplage  $D_{nm}$  comme une perturbation, on attende que  $A_n$  est une enveloppe de  $c_n$  qui varie peu en  $z$ , et que l'oscillation de  $c_n(z)$  provient essentiellement de l'exponentiel de (2.9). On suppose donc

$$|A_n'| \ll |k_n A_n|. \quad (2.11)$$

En utilisant la contrainte de WKB

$$|k'_n/k_n^2| \ll 1, \quad (2.12)$$

on transforme les équations du mouvement (2.6) à la forme plus simple

$$A'_n \sqrt{k_n} + \sum_m D_{nm} A_m \sqrt{k_m} \exp i \int (k_m - k_n) = 0. \quad (2.13)$$

On suppose maintenant que seul les modes transverses fondamental et peu excités sont peuplés et que l'énergie du mouvement longitudinal est beaucoup plus grande que l'énergie de ces modes transverses :  $\varepsilon_n \ll E$ . L'impulsion longitudinale  $k_n$  est alors à peu près la même pour chaque  $n$  et, en développant à l'ordre 1 en  $\varepsilon_n$ , on trouve que

$$k_m - k_n \simeq \frac{m}{\tilde{k}} (\varepsilon_n - \varepsilon_m), \quad (2.14)$$

où  $\tilde{k} = \sqrt{2mE} \approx k_n \approx k_m$ . On suppose que le couplage  $D_{nm}$  ne relie que les modes transverses peu excités ( $\varepsilon_n \ll E$ ), donc dans la somme (2.13) seul les modes peu excités contribuent. Cette hypothèse est aussi justifiée par la formule (2.8). En utilisant l'approximation  $k_n \approx k_m$ , on obtient

$$A'_n - \sum_{m \neq n} \left[ \frac{V'_{nm}}{\varepsilon_n - \varepsilon_m} \exp i \frac{m}{\tilde{k}} \int (\varepsilon_n - \varepsilon_m) \right] A_m = 0. \quad (2.15)$$

Cette équation est le principal résultat de cette section. Nous allons maintenant montre qu'elle est équivalente à une équation de Schrödinger 2D dépendant du temps. Avec les nouvelles variables

$$\tilde{A}_n(z) \equiv A_n(z) \exp -i \frac{m}{\tilde{k}} \int^z \varepsilon_n(z') dz', \quad (2.16)$$

l'équation (2.15) s'écrit

$$i \frac{d}{dz} \tilde{A}_n = \frac{m}{\tilde{k}} \varepsilon_n \tilde{A}_n + \sum_{m \neq n} \frac{iV'_{nm}}{\varepsilon_n - \varepsilon_m} \tilde{A}_m. \quad (2.17)$$

C'est l'équation que l'on aurait, dans un problème à deux dimensions, pour une particule soumise au potentiel dépendant du temps  $V_t(x, y) = V(x, y, z = \frac{\tilde{k}}{m} t)$ .

## 2.2 Conditions d'adiabaticité

L'état transverse fondamental à la fin d'une séparatrice symétrique en  $Y$  est dégénéré. Le potentiel transverse se décompose en deux puits distants, donc indépendants. Soit les états fondamentaux des deux puits  $|\psi_0(z = \infty)\rangle$  et  $|\psi_1(z = \infty)\rangle$ ,

chacun localisé sur un des puits. Dans le cas d'un potentiel qui reste symétrique, l'état fondamental  $|\varphi_0(z = -\infty)\rangle$  (resp. état premier excité  $|\varphi_1(z = -\infty)\rangle$ ) du potentiel transverse au début de guide se transforme adiabatiquement en la superposition  $(\psi_0 + \psi_1)/\sqrt{2}$  (resp.  $(\psi_0 - \psi_1)/\sqrt{2}$ ), ce qui respecte bien la conservation de la parité de la fonction d'onde. Pour que la condition d'adiabaticité soit vérifiée, la vitesse de l'atome doit être suffisamment faible. On ne déterminera pas cette condition ici.

Nous allons ici résoudre un autre problème d'adiabaticité : quelles conditions doivent être satisfaites pour qu'un atome suive adiabatiquement un guide en courbe sans peupler des états excités ?

Le transfère entre modes différents est donné par l'intégrale du terme en crochets de l'équation (2.15). Si la phase dans l'exponentiel tourne vite, alors l'intégrale s'annule et le système évolue sans transitions. En toute rigueur [11], la condition d'adiabaticité, c'est à dire la condition pour laquelle la possibilité de transition de l'état  $m$  à l'état  $n$  soit très petite devant 1, est

$$|V'_{nm}| \ll \frac{m}{\tilde{k}} (\epsilon_n - \epsilon_m)^2. \quad (2.18)$$

Cela nous permet de calculer, par exemple, les paramètres physiques d'un guide en courbe qui satisfait (2.18). On considère une courbe de rayon de courbe  $R$  et faisant un angle total  $\theta$ . Tant que  $z \ll R$ , les fonctions propres sont  $\varphi_n(x, y; z) = \varphi_n^0(x - z^2/2R, y)$ , où  $|\varphi_n^0\rangle$  sont des états propre d'un potentiel harmonique de pulsation  $\omega_0$ . Les éléments de matrice  $V'_{nm}$  sont

$$V'_{nm} = -m\omega_0^2 \frac{z}{R} \langle \varphi_n^0 | \hat{X} | \varphi_m^0 \rangle, \quad (2.19)$$

qui peuvent être surestimés par

$$|V'_{m0}|^2 < \max_z \sum_{n \neq 0} |V'_{nm}|^2 = m^2 \omega_0^4 \frac{z_{\max}^2}{R^2} \langle \varphi_0^0 | \hat{X}^2 | \varphi_0^0 \rangle = m^2 \omega_0^4 \frac{z_{\max}^2}{R^2} a_0^2, \quad (2.20)$$

où  $a_0 = (2m\omega_0)^{-1/2}$  est la taille quadratique moyenne de l'état fondamental. La condition d'adiabaticité (2.18) s'écrit

$$m\omega_0^2 \frac{z}{R} a_0 \ll \frac{m}{\tilde{k}} \omega_0^2. \quad (2.21)$$

Si l'angle  $\theta$  de la courbe est petit,  $\theta = z_{\max}/R$ . On obtient donc

$$\tilde{k} a_0 \ll 1/\theta. \quad (2.22)$$

Dans notre approximation, le rayon de courbe  $R$  n'apparaît pas dans la condition d'adiabaticité. Notons qu'il intervient, toutefois, dans les contraintes (2.10) et (2.11).

## 3. Interaction entre atomes

Au chapitre 2 on a considéré le mouvement d'un seul atome ou d'un gaz de bosons sans interactions où toutes les particules sont condensées dans le même état. En réalité, dès que l'on augmente la densité d'atomes pour avoir une meilleure précision de l'interféromètre, l'interaction atomique devient plus en plus importante et introduit la diffusion de phase du condensat [5–7,12]. Pendant un temps caractéristique que nous estimons à la section 3.1, cette diffusion débouche sur un collapse du contraste de l'interférence [7,13,14]. On verra qu'il existe une autre échelle du temps : le collapse est suivi par une résurgence. Entre les deux on observe une résurgence partielle qui donne lieu à la séparation d'états de nombre d'atomes pair et impair. La possibilité d'une telle séparation n'est pas encore traitée dans la bibliographie.

La diffusion de phase apparaît de même dans le cas d'un flux continu d'atome. Dans la section 3.2, on étudie le bruit de phase lors de la propagation. On propose un schéma de détection homodyne pour mesurer « la phase » macroscopique du jet. En appliquant les outils d'optique quantique aux atomes se propageant dans un guide droit, on montre que l'interaction introduit un bruit blanc de la phase.

### 3.1 Conséquences de la diffusion de phase sur l'interféromètre — modèle naïf

Le contraste d'interférence entre deux condensats dépend de la différence de leurs phases. Dans le cas des condensats indépendants, cette différence varie d'une expérience à l'autre, en donnant des résultats différents chaque fois que l'on répète la mesure de l'interférence. Cependant, une phase relative fixe est assurée si les condensats ont une origine commune : ils ont été obtenus à partir d'un seul condensat lequel on a coupé en deux de la façon suivante. Dans la suite, on supposera toujours que, initialement, tous les atomes sont dans l'état fondamental  $|\varphi_0\rangle$  du piège. En élevant une barrière de potentiel au centre du puits, on transforme le potentiel du piège d'une forme en U à une forme en W (fig. 3.1). Si les deux nouveaux puits sont suffisamment loins de l'un à l'autre, l'état fondamental devient dégénéré : on a une fonction d'onde propre  $\psi_0$  localisée sur un des puits, et  $\psi_1$  localisée sur

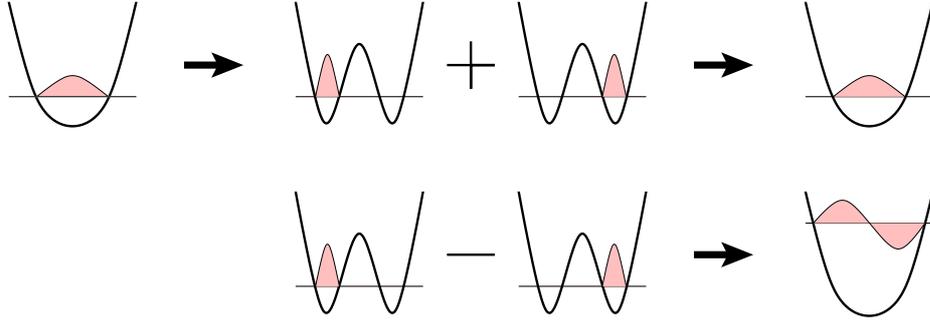


FIG. 3.1: En transformant le potentiel de piège de la forme  $U$  en  $W$ , on peut séparer un condensat en deux. L'état de chacun des atomes devient une superposition des fonctions d'ondes localisée sur les puits séparés par la barrière. Pendant la recombinaison, la superposition asymétrique se transforme en l'état premier excité du potentiel  $U$ .

l'autre. Si la séparation est adiabatique, l'état fondamental  $|\varphi_0\rangle$  est transformé en la superposition symétrique  $(|\psi_0\rangle + |\psi_1\rangle)/\sqrt{2}$  et tous les atomes sont, à l'issue de la séparation, dans cet état. Les atomes sont gardés un certain temps dans le potentiel  $W$  et on suppose que les états  $|\psi_0\rangle$  et  $|\psi_1\rangle$  se déphasent de  $\phi$  pendant ce temps.<sup>1</sup> Le but de la mesure interférométrique est de déterminer cette différence de phase  $\phi$ .

Après, on fait interférer les deux condensats en les réunissant : la barrière de potentiel est enlevée doucement. La superposition symétrique  $(|\psi_0\rangle + |\psi_1\rangle)/\sqrt{2}$  (resp. la superposition asymétrique  $(|\psi_0\rangle - |\psi_1\rangle)/\sqrt{2}$ ) se transforme adiabatiquement en état fondamental  $|\varphi_0\rangle$  (resp. en état premier excité  $|\varphi_1\rangle$ ) du potentiel de la forme  $U$ . Les populations  $N_0$  et  $N_1$  des états finaux  $|\varphi_0\rangle$  et  $|\varphi_1\rangle$  dépendent du déphasage  $\phi$  (fig. 3.3a). Si  $\phi$  est nul, on s'attend à retrouver tous les atomes dans l'état fondamental  $|\varphi_0\rangle$ , tandis que pour un déphasage  $\phi = \pi$ , la population finale de l'état fondamental est nulle. L'interférence apparaît donc dans la différence de populations  $N_1 - N_0$ .

Un interféromètre similaire peut être réalisé avec des atomes guidés. Si un condensat entier se propage dans un guide, alors la coordonnée longitudinale  $z$  joue le rôle du temps, et le problème se ramène au cas précédent avec des pièges en 2D. On peut séparer le condensat, initialement dans l'état transverse fondamental  $|\varphi_0\rangle$ , à l'aide d'une bifurcation du guide en Y (fig. 2.2a). Après la séparation, quand les deux bras du guide s'éloignent de l'un à l'autre, l'état fondamental est dégénéré :  $\psi_0$  et  $\psi_1$  sont les fonctions d'onde transverses localisées sur chacun des deux bras. En appliquant une autre séparatrice en Y de sens opposé, on fait interférer les deux condensats. Les superpositions symétrique et antisymétrique des états  $|\psi_0\rangle$  et  $|\psi_1\rangle$  se transforment, de même que précédemment, en l'état fondamental  $|\varphi_0\rangle$  et le premier excité  $|\varphi_1\rangle$ . Plusieurs méthodes de détection de la population dans les états

1.  $\phi$  peut être dû à ce que l'énergie potentielle n'est pas la même dans les deux bras.

$|\varphi_0\rangle$  et  $|\varphi_1\rangle$  peuvent être envisagées. Par exemple, on peut utiliser le fait que l'impulsion du condensat dans le mode transverse premier excité est inférieure à celle du mode fondamental. Les deux paquets d'atomes se séparent donc spatialement, ce qui permet la détection des populations  $N_0$  et  $N_1$ .

Notons qu'il existe une autre méthode pour réaliser la séparation des condensats. Dans cette méthode, initialement, deux puits sont séparés par une barrière de potentiel, et les atomes sont dans l'état fondamental de l'un des puits. Quand on diminue la barrière, l'effet tunnel établit un couplage entre les deux puits, et les atomes commencent à effectuer des oscillations de Rabi entre les deux pièges. Après un quart d'oscillation (pulse  $\pi/2$ ), on élève à nouveau la barrière. L'état de chaque atome est maintenant la superposition  $(|\varphi_0\rangle + i|\varphi_1\rangle)/\sqrt{2}$  des états fondamentaux  $|\varphi_0\rangle$  et  $|\varphi_1\rangle$  des deux puits, qui sont les mêmes états qu'avant. Après un certain temps d'évolution séparée, on recombine les deux condensats en appliquant un autre pulse  $\pi/2$ . Le fait que les deux condensats soient spatialement séparés à la sortie permet une détection des populations plus facile. Dans le cas d'atomes guidés, cette situation correspond aux coupleurs en X (fig. 2.2b).

On étudie dans la suite l'effet des interactions entre atomes sur le contraste d'interférence. Des approches similaires pour l'interféromètre à atomes piégés en 3D [14,15,7] et pour des atomes guidés [4,10] se trouvent dans la bibliographie.

Puisque l'on mesure le nombre total d'atomes à la fin, il est justifié de considérer comme état initial un état de Fock  $|\varphi_0 : N\rangle$ , où les  $N$  atomes sont dans le même état  $|\varphi_0\rangle$ . Si on néglige l'interaction pendant la séparation, chacun des atomes est transformé de façon indépendante, donc l'état du système devient :

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle &= \frac{1}{2^{N/2}} \frac{1}{\sqrt{N!}} \left( \hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_2^\dagger \right)^N |0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{k=0}^N \binom{N}{k}^{\frac{1}{2}} |\psi_0 : k; \psi_1 : N - k\rangle. \end{aligned} \quad (3.1)$$

A priori, une fonction d'onde  $\psi$  satisfaisant l'équation de Gross–Pitaevskii pour  $n$  atomes dépend de  $n$ . Donc si  $\psi_0$  et  $\psi_1$  dans (3.1) ne dépendent pas de  $k$ , les états  $|\psi_0 : k; \psi_1 : N - k\rangle$  ne sont pas solution de l'équation de Gross–Pitaevskii pour tous les  $k$ . Ces états évoluent donc :  $\psi_0$  et  $\psi_1$  se déforment d'une façon qui dépend de  $k$ . Pour simplifier le problème, on va plutôt supposer que l'état généré par la séparatrice est :

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{k=0}^N \sqrt{\binom{N}{k}} |\psi_0^{(k)} : k; \psi_1^{(N-k)} : N - k\rangle, \quad (3.2)$$

où  $\psi_i^{(n)}$  satisfait l'équation de Gross–Pitaevskii pour le nombre d'atomes  $n$  :

$$h\psi_i^{(n)} + \kappa n |\psi_i^{(n)}|^2 \psi_i^{(n)} = \mu_i(n) \psi_i^{(n)}, \quad (3.3)$$

Si les variations de  $\psi_i^{(n)}$  selon  $n$  sont négligeables sur l'intervalle  $[N - \sqrt{N}, N + \sqrt{N}]$ , alors l'état (3.2) est équivalente à l'état (3.1). On suppose que la séparatrice est symétrique, ce qui assure que  $E_0(n) = E_1(n) = E(n)$ .

Un développement de  $E(n)$  autour  $N/2$  conduit à l'expression suivante de la phase accumulée par la composante  $|k, N - k\rangle$  :

$$[E_0(k) + E_1(N - k)]t = 2E(N/2)t + \left. \frac{d^2E(n)}{dn^2} \right|_{n=N/2} (k - N/2)^2 t, \quad (3.4)$$

où le terme en  $dE/dn$  s'annule dans  $N/2$  à cause de la symétrie  $E_0(n) = E_1(n)$ . Alors, l'évolution de l'état (3.1) s'écrit

$$|\Phi(t)\rangle = \frac{e^{\perp i\omega_0 t}}{\sqrt{N!}} \sum_{k=0}^N \sqrt{\binom{N}{k}} e^{\perp i\xi(k - N/2)^2 t} |\psi_0 : k; \psi_1 : N - k\rangle, \quad (3.5)$$

où  $\omega_0 = 2E(N/2)$  et  $\xi = d^2E(k)/dk^2|_{k=N/2}$ . Pour estimer  $\xi$ , notons que

$$\frac{dE(n)}{dn} = \mu(n) = \langle \psi_i | h | \psi_i \rangle + \kappa n \int |\psi_i^{(n)}|^4. \quad (3.6)$$

Si la fonction d'onde  $\psi_i^{(n)}$  varie peu en  $n$  autour  $N/2$ , alors  $\xi \approx \kappa \int |\psi_i|^4$ .

Après un temps d'évolution, on applique la deuxième lame séparatrice. Rappelons que la superposition  $(\psi_0 \pm \psi_1)/\sqrt{2}$  se transforme en état final  $\phi_{0,1}$ , et que, en plus de l'évolution due à l'interaction, les états  $\psi_0$  et  $\psi_1$  sont déphasés de  $\phi$ . On s'intéresse à la dépendance en  $\phi$  des populations  $N_0$  et  $N_1$  des états finaux  $\phi_0$  et  $\phi_1$ , ce qui est représenté par la figure 3.3a. Si  $\phi = 0$ , on s'attend à ce que l'état final soit  $|\phi_0 : N; \phi_1 : 0\rangle$ . En réalité, dès que l'on augmente le temps d'interaction, la différence des populations tend vers 0, et sa variance tend vers  $2\sqrt{N}$ , comme si les phases des composantes de l'état (3.5) étaient aléatoires. Cette « décohérence » est visible dans la figure 3.2.

Le temps caractéristique de ce collapse dépend du nombre total d'atomes. L'argument naïf suivant permet d'estimer ce temps. Un terme de phase en  $\theta k$  dans la décomposition (3.5) correspondrait à une phase relative  $\theta$  entre  $\psi_0$  et  $\psi_1$ . Or dans l'expression (3.5), le terme de phase n'est pas linéaire en  $k$ , mais s'écrit  $\xi t (k - N/2)^2$ . Pour les  $k$  aux alentours de  $k_0$ , en linéarisant on trouve une « phase »  $\theta_0 = 2\xi t (k_0 - N/2)$ . Puisque  $(k_0 - N/2)$  parcourt la distribution binomiale de largeur  $\sqrt{N}$ , on a une largeur en phase

$$\Delta\theta \simeq 2\xi\sqrt{N}t. \quad (3.7)$$

On a une dispersion total de la phase lorsque cette largeur est de l'ordre de  $2\pi$ . Cela correspond au temps de diffusion de phase

$$T_C \sim \frac{1}{\xi\sqrt{N}}. \quad (3.8)$$

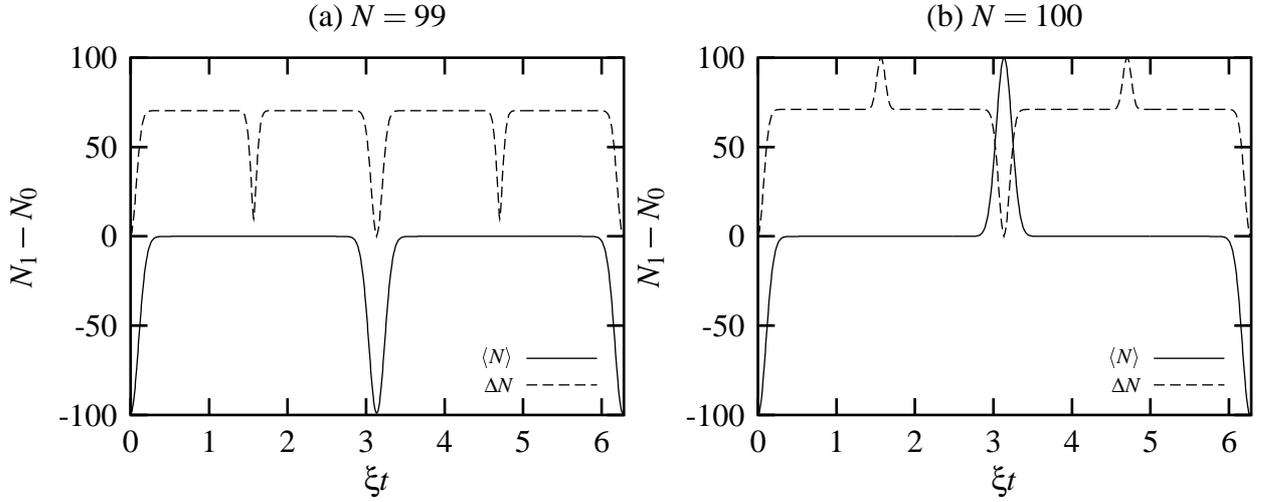


FIG. 3.2: La différence des populations et sa variance en fonction du temps d'interaction. Le nombre total d'atomes est (a)  $N = 99$  et (b)  $N = 100$ , le déphasage est  $\phi = 0$ . Après le vite collapse, on a une résurgence partielle à  $t = \pi/\xi$ , et une totale à  $t = 2\pi/\xi$ .

Cette dépendance de  $T_C$  avec le nombre d'atomes est bien justifiée par notre simulations. Le même ordre est obtenu dans les références [14,6,7].

Le collapse de phase est un effet indésirable dans l'interféromètre. En effet, dans un interféromètre, on veut déterminer  $\phi$  grâce à la mesure de  $N_1 - N_0$ . Or l'amplitude de la fonction sinusoïdale  $\langle N_1 - N_0 \rangle(\phi)$  décroît avec  $t$ . De plus, la variance de  $(N_1 - N_0)$ , elle, augmente. (Cf. fig. 3.3.) Cela débouche sur la diminution totale du rapport signal/bruit et sur l'arrêt de l'interférence.

Il est facile de voir à partir de l'évolution (3.5) que l'interférence se retrouve pour  $t = 2\pi n/\xi$  (avec  $n$  entier). Cette résurgence de phase est bien connue [14].

Un autre phénomène intéressant apparaît à  $t = \pi/\xi$ . Le facteur de phase sous la somme dans (3.5) devient indépendant de  $k$  si  $N$  est impair. Dans ce cas, tous les atomes réapparaissent dans le mode  $\varphi_0$  (fig. 3.2) : on a une résurgence totale de l'interférence. Par contre, si  $N$  est pair, l'interaction provoque un déphasage  $\pi$  pour chaque composante avec  $k$  impair. Cela est équivalent à un déphasage  $\pi$  de l'état  $|\psi_0\rangle$ , donc tous les atomes réapparaissent dans le mode  $\varphi_1$  en causant une résurgence inverse. On relâche maintenant la condition initiale de  $N$  fixe, et on s'autorise à avoir une superposition d'états de Fock en entrée. Après un temps d'interaction  $t = \pi/\xi$  les composantes de Fock sont séparées à la sortie : ceux de nombre d'atomes impair sortent par le mode  $\varphi_0$ , tandis que ceux de nombre pair sortent par  $\varphi_1$ . Notre interféromètre se comporte donc comme un peigne. La possibilité d'une telle séparation n'est pas encore traitée dans la bibliographie.

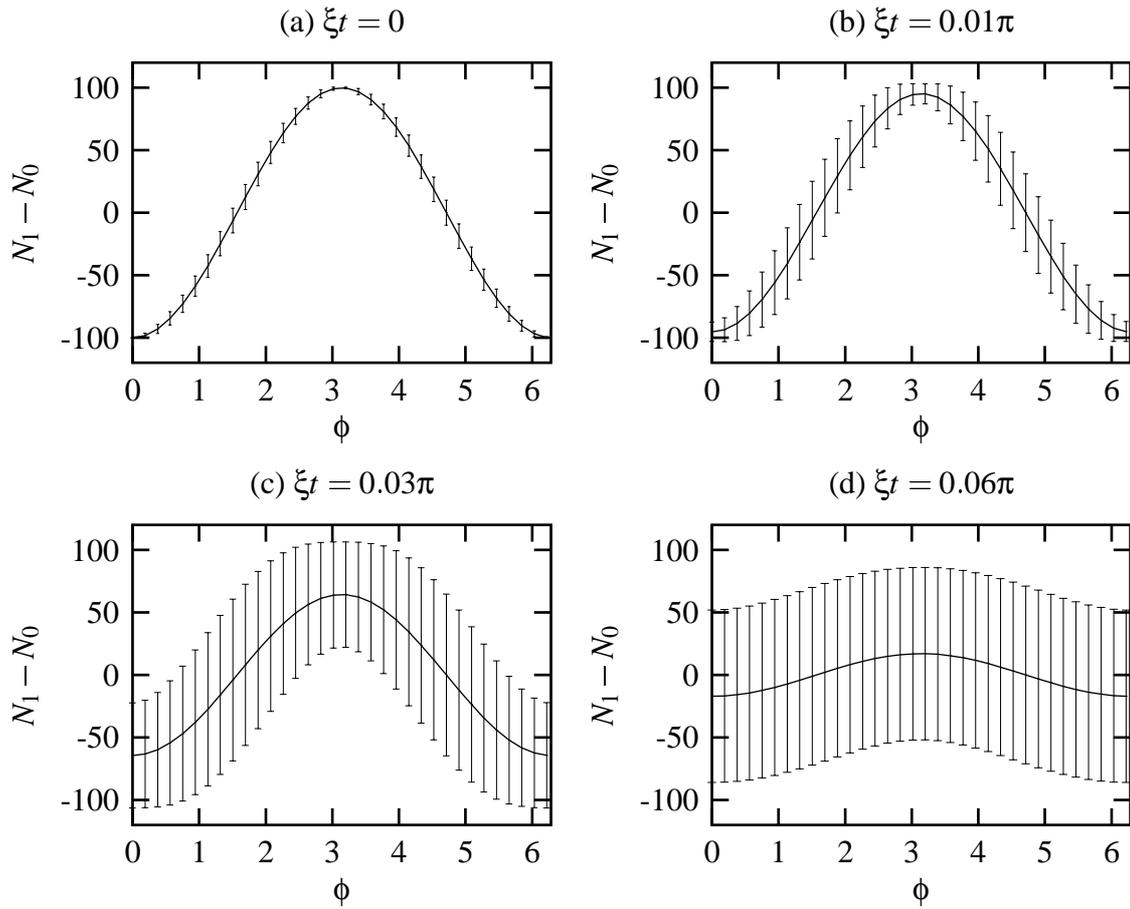


FIG. 3.3: La différence des populations moyennes et sa variance en fonction de déphasage  $\phi$ . Le nombre total d'atomes est  $N = 100$ , le temps d'interaction est (a)  $\xi t = 0$ , (b)  $\xi t = 0.01\pi$ , (c)  $\xi t = 0.03\pi$ , et (d)  $\xi t = 0.06\pi$ .

## 3.2 Effet d'interactions lors de la propagation

On a vu que l'interaction atomique introduit un bruit de la phase relative des condensats dans les deux bras de l'interféromètre. On s'intéresse maintenant à l'évolution de phase des atomes quand ils se propagent dans un guide droit. Cette phase, évidemment, n'est pas une quantité physique mesurable, car « la phase d'un seul condensat » n'est pas bien définie. Toutefois, on peut la comparer à la phase d'un autre condensat beaucoup plus grand (aussi dit oscillateur local en optique quantique) en faisant une détection homodyne (fig. 3.4). La différence des courants des deux détecteurs dépend de la phase relative des deux condensats. Le bruit de la phase est donc donné par le bruit de la différence des courants. Notons que la détection homodyne est vivement connectée à l'interférométrie : si on utilise la même source d'atomes pour l'oscillateur local que le mode guidé en interaction, on se ramène à un interféromètre.

Dans la première partie de cette section, un modèle naïf est présenté en point de vue des particules. Dans la deuxième partie, nous appliquons les résultats d'optique quantique sur la propagation de faisceau lumineux dans milieu Kerr [16,17] au cas d'un faisceau d'atomes.

Pour simplifier, on considérera un guide rectiligne dont le potentiel est invariant par translation dans la direction longitudinale. On se place dans le cas où le faisceau d'atomes est suffisamment dilué pour que l'énergie d'interaction par atome soit suffisamment faible pour ne pas peupler les modes transverses excités. On se réduit donc à un problème à une dimension.

### 3.2.1 Point de vue des particules

On suppose que le guide est alimenté atome par atome lancés indépendamment les uns des autres avec une impulsion  $k_0$  au début de guide. Chaque atome est représenté par un paquet d'onde gaussien d'extension  $z_0$ . Le potentiel d'interaction entre deux atomes est  $v(r_1, r_2) = \kappa \delta(r_1 - r_2)$ . L'énergie d'interaction entre deux atomes distant de  $r$  est alors

$$U_1(r) = \kappa \int dz \frac{1}{2\pi z_0^2} \exp\left(-\frac{z^2}{2z_0^2}\right) \exp\left(-\frac{(z-r)^2}{2z_0^2}\right) = \frac{\kappa}{\sqrt{\pi}2z_0} \exp\left(-\frac{r^2}{4z_0^2}\right). \quad (3.9)$$

On note  $n$  la densité linéique moyenne d'atomes dans le guide. Puisque les atomes sont lancés indépendamment les uns des autres, le nombre d'atomes compris entre  $r$  et  $r + dr$  obéit à une statistique poissonnienne : sa valeur moyenne dans cet intervalle est  $dN = ndr$ , et sa variance est  $d(\delta N^2) = dN = ndr$ . L'énergie totale d'interaction

vue par un seul atome et sa variance s'écrivent

$$\langle U \rangle = \int U_1(r) dN = \kappa n \quad (3.10)$$

$$\delta U^2 = \int U_1^2(r) d(\delta N^2) = \frac{\kappa^2}{2\sqrt{2\pi}} \frac{n}{z_0}. \quad (3.11)$$

Le bruit de phase accumulée par un atome pendant le temps de passage  $L/v_g$  est

$$\delta\phi \sim \frac{\kappa L \sqrt{n}}{v_g \sqrt{z_0}}. \quad (3.12)$$

Plus les atomes sont localisés, plus la dispersion en phase est grande. Pour diminuer le bruit de phase, on propose donc d'utiliser une source d'atomes cohérente où les atomes se propagent avec la même impulsion  $k_0$ . Notre calcul, cependant, n'est pas valable si  $z_0 \gtrsim L$ , donc une autre approche est souhaitable.

### 3.2.2 Approche optique quantique

On propose l'expérience suivante pour mesurer le bruit de phase dû à l'interaction atomique. Un faisceau intense d'atomes de pulsation  $\omega_0$  est généré par un laser à atome, et il est guidé le long du chemin en gras (voir fig. 3.4). Le confinement du guide est suffisamment faible pour que l'on puisse négliger l'interaction atomique. A l'aide d'une séparatrice fortement asymétrique, on sépare une partie beaucoup moins intense (dit le condensat d'intérêt) du reste (dit mode classique ou oscillateur local en optique quantique). Le confinement du potentiel transverse du guide du condensat d'intérêt (la pulsation du puits) augmente, ce qui implique une diminution de la largeur de la fonction d'onde de l'état fondamental transverse. Ce fort confinement conduit à une densité d'atomes élevée, et engendre une interaction entre atomes considérable. Une diffusion de phase peut alors se produire. A la fin de la région de longueur  $L$ , on mesure la phase en utilisant une détection homodyne : le condensat d'intérêt est mélangé avec le mode classique par une séparatrice symétrique. La différence des nombres d'atomes sur les deux raies de sortie est détectée.

Désignons par  $\hat{\Psi}(z, t)$  l'opérateur du champ le long de la région d'interaction, et par  $\hat{A}$  l'opérateur d'annihilation du mode classique à l'entrée de la séparatrice symétrique. Le mode classique est dans un état cohérent  $|A\rangle$ , et  $\hat{A}$  évolue selon  $e^{\pm i\omega_0 t}$ . Les modes sortant la séparatrice sont  $(\hat{\Psi}(L, t) + \hat{A})/\sqrt{2}$  et  $(\hat{\Psi}(L, t) - \hat{A})/\sqrt{2}$ . Les courants des détecteurs sont proportionnels aux nombres d'atomes de ces modes. Leur différence, qui est le signal qui nous intéresse, correspond à l'opérateur

$$\hat{I}(t) = A^* e^{i\omega_0 t} \hat{\Psi}(L, t) + A e^{-i\omega_0 t} \hat{\Psi}^\dagger(L, t), \quad (3.13)$$

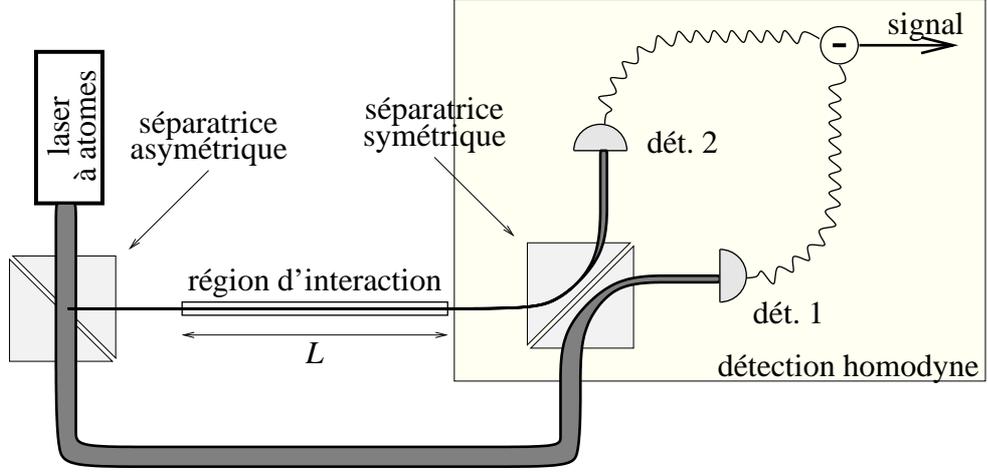


FIG. 3.4: Arrangement de mesure homodyne. En mélangeant le mode de l'intérêt avec un champ intense, on peut mesurer l'opérateur de quadrature  $\hat{Q}_\varepsilon(t) = (e^{i\varepsilon}\hat{\Psi}(L,t) + e^{\perp i\varepsilon}\hat{\Psi}^\dagger(L,t))/\sqrt{2}$ .

où on a remplacé  $\hat{A}(t)$  avec sa valeur moyenne classique  $Ae^{\perp i\omega_0 t}$ . La détection homodyne est sensible à la composante du champ  $\hat{\Psi}(z,t)$  de pulsation  $\omega_0$ , ce qui justifie l'introduction de l'enveloppe du champ lentement variable  $\hat{\Psi}(z,t) \equiv e^{i(\omega_0 t \perp k_0 z)}\hat{\Psi}(z,t)$ , où  $k_0$  est l'impulsion d'un atome d'énergie  $\omega_0$ . Si on choisit la phase du mode classique tel que  $A^* e^{ik_0 L} = |A|e^{i\varepsilon}$ , où  $\varepsilon$  est un paramètre réel, alors  $\hat{I}(t)$  est proportionnel à l'opérateur quadrature du champ

$$\hat{Q}_\varepsilon(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{i\varepsilon}\hat{\Psi}(L,t) + e^{\perp i\varepsilon}\hat{\Psi}^\dagger(L,t) \right). \quad (3.14)$$

Classiquement,  $Q_\varepsilon$  est la projection, dans l'espace des phases, du vecteur représentant le champ sur la droite faisant un angle  $\varepsilon$  avec l'axe  $Ox$  (fig. 3.5). Si on note  $\alpha$  la représente complexe du champ, des petits changements de la phase du nombre complexe  $\alpha$  autour de  $\theta$ , peuvent être obtenus, en mesurant  $\hat{Q}_{\theta+\pi/2}$ , par

$$|\alpha|\delta\theta = Q_{\theta+\pi/2}. \quad (3.15)$$

Les fluctuations de phase sont donc données par les fluctuations de  $\hat{Q}_{\theta+\pi/2}$ . Les calculs suivants permettent de déterminer ces fluctuations.

Dans la région d'interaction, l'équation du mouvement de l'opérateur champ est donné par

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi}(z,t) = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\hat{\Psi}(z,t) + \kappa\hat{\Psi}^\dagger(z,t)\hat{\Psi}(z,t)\hat{\Psi}(z,t). \quad (3.16)$$

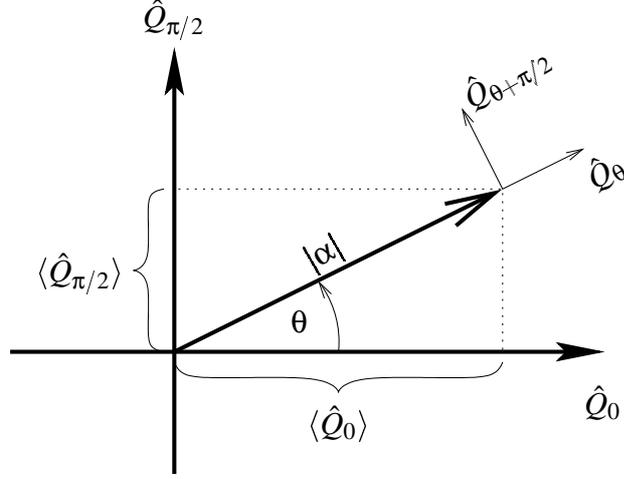


FIG. 3.5: Représentation de l'état cohérent  $|\alpha\rangle$  dans l'espace des quadratures. Les fluctuations de phase  $\theta$  est donné par les fluctuations de quadrature  $\hat{Q}_{\theta+\pi/2}$ .

On peut toujours développer  $\hat{\Psi}(z, t)$  dans l'intervalle  $[0, L]$  selon la base propre de l'opérateur de l'énergie cinétique longitudinal dans la région d'interaction, selon  $\psi_n(z) \equiv \exp ik_n z$  avec l'énergie cinétique  $\omega(k_n)$ . Soit  $\hat{a}_n$  l'opérateur détruisant un atome de fonction d'onde  $\psi_n(z)$ . En point de vue de Heisenberg, l'opérateur du champ au point  $z$  à l'instant  $t$  est

$$\hat{\Psi}(z, t) = \sum_n \psi_n(z) \hat{a}_n(t). \quad (3.17)$$

Au début de guide, on a lancé des atomes de l'énergie  $\omega_0 = \omega(k_0)$ , et on s'intéresse à cette pulsation dans la détection homodyne. On développe donc  $\omega(k)$  autour  $k_0$  :  $\omega(k) = \omega_0 + v_g(k - k_0)$ , où  $v_g$  est la vitesse de groupe. Le terme de l'énergie cinétique dans (3.16) est alors

$$-\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{\Psi}(z, t) = \sum_n [\omega_0 + v_g(k_n - k_0)] e^{ik_n z} \hat{a}_n(t). \quad (3.18)$$

Avec l'enveloppe lentement variable du champ  $\hat{\Psi}(z, t) = e^{i(\omega_0 t \pm k_0 z)} \hat{\Psi}(z, t)$ , l'équation du mouvement (3.16) s'écrit :

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi} &= -\omega_0 \hat{\Psi} + \kappa \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}^2 + \sum_n [\omega_0 + v_g(k_n - k_0)] e^{i(k_n \pm k_0)z + i\omega_0 t} \hat{a}_n(t) \\ &= \kappa \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi} - i v_g \frac{\partial}{\partial z} \hat{\Psi}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

En appliquant le changement de variable  $\tau \equiv t - z/v_g$ , le champ  $\hat{\Phi}(z, \tau) \equiv \hat{\Psi}(z, t)$  vérifie

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{\Phi}(z, \tau) = -i \frac{\kappa}{v_g} \hat{\Phi}^\dagger(z, \tau) \hat{\Phi}(z, \tau) \hat{\Phi}(z, \tau). \quad (3.20)$$

Avant de résoudre cette équation, notons que  $\hat{\Phi}(z, \tau)$  est une fonction de  $\hat{\Phi}(0, \tau)$  et de  $\hat{\Phi}^\dagger(0, \tau)$ . On conclut que  $\hat{\Psi}(z, t)$  est, en général, une fonction de  $\hat{\Psi}(0, t - z/v_g)$  et de  $\hat{\Psi}^\dagger(0, t - z/v_g)$  :

$$\hat{\Psi}(z, t) = f_z(\hat{\Psi}(0, t - z/v_g), \hat{\Psi}^\dagger(0, t - z/v_g)). \quad (3.21)$$

Le champ « suit » les paquets d'onde bougeant avec la vitesse  $v_g$ .

Pour résoudre (3.20), on linéarise autour la solution classique stationnaire :

$$\Phi_0(z) \equiv \alpha \varphi_0(z) \equiv \frac{\alpha}{\sqrt{L}} \exp\left(-i \frac{\kappa |\alpha|^2}{Lv_g} z\right). \quad (3.22)$$

Cette solution correspond à un état  $|\alpha\rangle$  de mode représenté par la fonction d'onde  $\psi_0(z) = L^{-1/2} \exp i(k_0 - \Delta k)z$  avec une impulsion décalée de  $\Delta k = \kappa |\alpha|^2 / Lv_g$  par rapport à  $k_0$  à cause de l'interaction. La densité linéique moyenne d'atomes dans la région d'interaction est  $|\alpha|^2 / L$ , et la fonction d'onde  $\psi_0(z)$  satisfait l'équation de Gross–Pitaevskii de potentiel chimique  $\omega_0$ .<sup>2</sup>

Dans cet état, la valeur moyenne du champ est  $\langle \hat{\Phi}(z, t) \rangle = \alpha \varphi_0(z)$  [ou  $\langle \hat{\Psi}(z, t) \rangle = \alpha e^{-i\omega_0 t} \psi_0(z)$ ]. On cherche donc la solution de l'équation (3.20) sous la forme

$$\hat{\Psi}(z, t) = \Psi_0(z) + \delta \hat{\Psi}(z, t), \quad (3.23)$$

où  $\delta \hat{\Phi}$  est supposé comme une variation petite devant la partie classique. Aux ordres linéaires en  $\delta \hat{\Phi}$ , on réécrit l'équation (3.20) :

$$\frac{\partial}{\partial z} \delta \hat{\Phi} = -i \frac{\kappa}{v_g} \left[ 2|\Phi_0|^2 \delta \hat{\Phi} + \Phi_0^2 \delta \hat{\Phi}^\dagger \right]. \quad (3.24)$$

---

2. La solution classique indépendant de  $\tau$  décrit un flux d'atomes stationnaire, tel que la densité linéique  $n|\alpha|^2/L$  est uniforme et constante. En général,  $\alpha$  peut dépend de  $\tau$ , en donnant lieu à la propagation d'un paquet d'atomes, ce qui est le cas, par exemple, pour une impulsion d'un « laser » à atomes. Bien sûr, dans l'approximation de vitesse du groupe  $[-(1/2m)\partial^2/\partial z^2 \approx \omega_0 - iv_g(\partial/\partial z - k_0)]$ , la fonction d'onde

$$\psi_0(z, t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp -i \left[ \omega_0 t - \left( k_0 - \frac{\kappa |\alpha(t - z/v_g)|^2}{Lv_g} \right) z \right]$$

satisfait l'équation de Gross–Pitaevskii dépendent de temps pour  $|\alpha(t - z/v_g)|^2$  atomes.

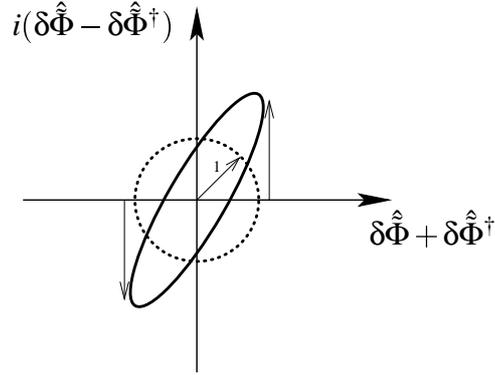


FIG. 3.6: Contour de la distributions de quasi-probabilité du vide et d'un état comprimé dans l'espace des phases du champ  $\delta\hat{\Phi}(z, \tau)$ . Le processus du compression est décrit par le hamiltonien  $\hat{H} = \Delta k(\delta\hat{\Phi} + \delta\hat{\Phi}^\dagger)^2/2$ .

En introduisant le changement du champ  $\delta\hat{\Phi}(z, \tau) \equiv \Phi_0^*(z)\delta\hat{\Phi}(z, \tau)$ , on obtient l'équation de « squeezing »

$$\frac{\partial}{\partial z}\delta\hat{\Phi} = -i\Delta k \left( \delta\hat{\Phi} + \delta\hat{\Phi}^\dagger \right). \quad (3.25)$$

La même évolution est obtenue avec le hamiltonien  $\hat{H} = \Delta k(\delta\hat{\Phi} + \delta\hat{\Phi}^\dagger)^2/2$ , où le temps est remplacé par  $z$ . Un tel hamiltonien appliqué au vide réalise un état comprimé (le vide est compris par rapport au champ  $\delta\hat{\Phi}$ ). Une interprétation graphique est montrée sur la figure 3.6.

En ajoutant membre à membre à (3.25) son équation hermétique conjuguée, on montre que  $\delta\hat{\Phi} + \delta\hat{\Phi}^\dagger$  ne dépend pas de  $z$ . La solution est donc

$$\delta\hat{\Phi}(z, \tau) = (1 - i\Delta kz)\delta\hat{\Phi}(0, \tau) - i\Delta kz\delta\hat{\Phi}^\dagger(0, \tau). \quad (3.26)$$

La formule (3.21) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \delta\hat{\Psi}(z, t) = & (1 - i\Delta kz)e^{\perp i\Delta kz}\delta\hat{\Psi}(0, t - z/v_g) \\ & - i\Delta kz e^{\perp i\Delta kz}\delta\hat{\Psi}^\dagger(0, t - z/v_g). \end{aligned} \quad (3.27)$$

$\hat{Q}_\varepsilon$  s'écrit, en fonction des variations  $\delta\hat{\Psi}$  et  $\delta\hat{\Psi}^\dagger$ ,

$$\hat{Q}_\varepsilon(t) = \sqrt{2}\text{Re}[e^{i\varepsilon}\Phi_0(L)] + \frac{i}{\sqrt{2}}(e^{i\varepsilon}\delta\hat{\Psi}(L, t) + e^{\perp i\varepsilon}\delta\hat{\Psi}^\dagger(L, t)). \quad (3.28)$$

En négligeant les variations  $\delta\hat{\Psi}$  et  $\delta\hat{\Psi}^\dagger$ , la valeur moyenne de  $\hat{Q}_\varepsilon(t)$  est nul pour  $\varepsilon = \Delta kL$ , ce qui était attendu car  $\Delta kL$  est la phase due aux interactions accumulée pendant la propagation. Le bruit de phase est donc déterminé par la mesure de la quadrature  $\hat{Q}_{\Delta kL+\pi/2}$ .

La fonction de corrélation de  $\hat{Q}_\varepsilon$  est donnée par

$$C_\varepsilon(t, t') = \langle \hat{Q}_\varepsilon(t)\hat{Q}_\varepsilon(t') \rangle - \langle \hat{Q}_\varepsilon(t) \rangle \langle \hat{Q}_\varepsilon(t') \rangle. \quad (3.29)$$

On s'attend à ce que, au début de la région d'interaction, le champ atomique arrive dans l'état cohérent du mode classique, donc  $\delta\hat{\Psi}(0, t) |\alpha\rangle = 0$  pour tout  $t$ . On exprime (3.29) avec l'opérateurs du champ au point  $z = 0$ . La partie classique, évidemment, ne contribue pas. Les termes linéaires en champ donnent aussi zéro, car dans notre approximation linéaire,  $\delta\hat{\Psi}(L, t)$  contient les champs  $\delta\hat{\Psi}(0, t - L/v_g)$  et  $\delta\hat{\Psi}^\dagger(0, t - L/v_g)$  au premier ordre, dont la valeur moyenne s'annule. En utilisant (3.27), les termes restants s'expriment :

$$\frac{e^{2i\varepsilon}}{2} \langle \delta\hat{\Psi}(L, t)\delta\hat{\Psi}(L, t') \rangle = \frac{1}{2} e^{2i(\varepsilon \pm \Delta kL)} (1 - i\Delta kL)(-i\Delta kL)D(t' - t), \quad (3.30)$$

$$\frac{1}{2} \langle \delta\hat{\Psi}(L, t)\delta\hat{\Psi}^\dagger(L, t') \rangle = \frac{1}{2} (1 - i\Delta kL)(1 + i\Delta kL)D(t' - t), \quad (3.31)$$

$$\frac{1}{2} \langle \delta\hat{\Psi}^\dagger(L, t)\delta\hat{\Psi}(L, t') \rangle = \frac{1}{2} (i\Delta kL)(-i\Delta kL)D(t' - t), \quad (3.32)$$

$$\frac{e^{-2i\varepsilon}}{2} \langle \delta\hat{\Psi}^\dagger(L, t)\delta\hat{\Psi}^\dagger(L, t') \rangle = \frac{1}{2} e^{\pm 2i(\varepsilon \pm \Delta kL)} (i\Delta kL)(1 + i\Delta kL)D(t' - t), \quad (3.33)$$

où  $D(t' - t) = \langle \delta\hat{\Psi}(0, t - L/v_g)\delta\hat{\Psi}^\dagger(0, t' - L/v_g) \rangle$ . En remplaçant la valeur moyenne par  $\langle [\delta\hat{\Psi}(0, t - L/v_g), \delta\hat{\Psi}^\dagger(0, t' - L/v_g)] \rangle = (1/v_g)\delta(t' - t)$ , on obtient pour la fonction de corrélation :

$$C_\varepsilon(t, t') = \left[ -\Delta k^2 L^2 \cos 2(\varepsilon - \Delta kL) + \Delta kL \sin 2(\varepsilon - \Delta kL) + \Delta k^2 L^2 + \frac{1}{2} \right] \frac{1}{v_g} \delta(t' - t). \quad (3.34)$$

La fonction de corrélation de la phase est donc

$$C_{\Delta kL+\pi/2}(t, t') = \left[ 2\Delta k^2 L^2 + \frac{1}{2} \right] \frac{1}{v_g} \delta(t' - t). \quad (3.35)$$

Le bruit de la phase est un bruit blanc. Sa densité spectrale est supérieure à ce que l'on a en l'absence d'interaction.

## 4. Conclusions

Dans la première partie du rapport, on a étudié le mouvement d'atomes dans un guide. On a précisé la condition pour que l'atome suive adiabatiquement l'état fondamental du mouvement transverse. A l'aide de notre résultat, on peut déterminer, par exemple, les paramètres expérimentaux permettant la séparation cohérente des ondes atomiques sur une séparatrice en Y : l'impulsion longitudinale des atomes et sa dispersion, le confinement du potentiel transverse, l'angle entre les deux bras de séparatrice en Y, etc.

Dans la dernière partie, on a montré que l'interaction entre atomes introduit un bruit de la phase macroscopique du condensat. Dans le cas où la phase d'un jet d'atomes est mesurée par détection homodyne, on a obtenu un bruit blanc : on ne trouve aucune corrélation entre deux résultats consécutifs. Dans notre modèle, la mesure n'a aucun effet sur l'état du système. Le problème reste ouvert : comment la mesure de phase influe l'interféromètre ? Pour le résoudre et pour étudier les corrélations spatiales dans le condensat, nous proposons à faire une simulation de Monte Carlo quantique.

# Bibliographie

- [1] P. R. Berman, ed., *Atom Interferometry*, Academic Press, San Diego, 1997.
- [2] N. H. Dekker, C. S. Lee, V. Lorent, J. H. Thywissen, S. P. Smith, M. Drndić, R. M. Westervelt, et M. Prentiss, *Guiding neutral atoms on a chip*, Phys. Rev. Lett. **84** (2000), 1124–1127.
- [3] D. Cassettari, B. Hessmo, R. Folman, T. Maier, et J. Schmiedmayer, *Beam splitter for guided atoms*, Phys. Rev. Lett. **85** (2000), 5483–5487.
- [4] E. Andersson, M. T. Fontenelle, et S. Stenholm, *Quantum statistics of atoms in microstructures*, Phys. Rev. A **59** (1999), 3841–3850.
- [5] M. Lewenstein, et L. You, *Quantum phase diffusion of a Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. Lett. **77** (1996), 3489–3493.
- [6] K. Mølmer, *Phase collapse and excitations in bose-einstein condensates*, Phys. Rev. A **58** (1998), 566–575.
- [7] J. Javanainen, et M. Wilkens, *Phase and phase diffusion of a split Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. Lett. **78** (1997), 4675–4678.
- [8] E. A. Hinds, C. J. Vale, et M. G. Boshier, *Two-wire waveguide and interferometer for cold atoms*, Phys. Rev. Lett. **86** (2001), 1462–1465.
- [9] P. Leboeuf, et N. Pavloff, *Bose-Einstein beams: Coherent propagation through a guide*, Phys. Rev. A **64** (2001), 033602.
- [10] E. Andersson, T. Calarco, R. Folman, M. Andersson, B. Hessmo, et J. Schmiedmayer, *Multimode interferometer for guided matter waves*, Phys. Rev. Lett. **88** (2002), 100401.
- [11] A. Messiah, *Mécanique quantique*, Dunod, Paris, 1964.

- [12] J. Javanainen, et S. M. Yoo, *Quantum phase of a Bose-Einstein condensate with an arbitrary number of atoms*, Phys. Rev. Lett. **76** (1996), 161–164.
- [13] E. M. Wright, et D. F. Walls, *Collapses and revivals of Bose-Einstein condensates formed in small atomic samples*, Phys. Rev. Lett. **77** (1996), 2158–2161.
- [14] E. M. Wright, T. Wong, M. J. Collett, S. M. Tan, et D. F. Walls, *Collapses and revivals in the interference between two Bose-Einstein condensates formed in small atomic samples*, Phys. Rev. A **56** (1997), 591–602.
- [15] W. Hänsel, J. Reichel, P. Hommelhoff, et T. W. Hänsch, *Trapped-atom interferometer in a magnetic microtrap*, Phys. Rev. A **64** (2001), 063607.
- [16] C. Fabre, *Quantum fluctuations in light beams*, in Quantum Fluctuations, S. Reynaud, E. Giacobino, et J. Zinn-Justin, eds., Les Houches, Session LXIII, 1995, vol. LXIII, Elsevier Science B.V., 1997, chapitre 4, pp. 181–214.
- [17] M. J. Potasek, et B. Yurke, *Squeezed-light generation in a medium governed by the nonlinear schrödinger equation*, Phys. Rev. A **35** (1987), 3974–3977.