

KVANTUMÁLLAPOTOK
TRANSZFORMÁLÁSA
TELEPORTÁCIÓ SEGÍTSÉGÉVEL

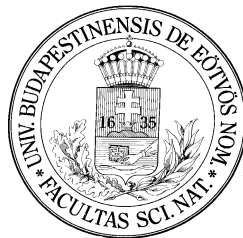
Kurucz Zoltán

Témavezető:

Janszky József

az MTA levelező tagja

MTA Szilárdtestfizikai és Optikai Kutatóintézet



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Budapest, 2001

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék	i
1. Bevezetés	1
2. A kvantummechanika valószínűségelméleti megközelítése	3
2.1. Kvantumlogika	3
2.1.1. Események	3
2.2. Fizikai mennyiség és állapot	4
2.2.1. Klasszikus és kvantummechanika	5
2.3. Pozitív operátor értékű mértékek	7
3. A kvantumoptika alapjai	9
3.1. Az elektromágneses tér kvantálása véges térben	9
3.2. Nevezetes állapotok a kvantumoptikában	11
3.3. Veszteségmentes nyalábosztók	14
4. Kvantumteleportáció	17
4.1. Összefonódott állapotok	17
4.2. Kétállapotú rendszer teleportációja	19
4.3. Általánosabb sémák	22
5. A teleportáció mint állapottranszformáció	24
5.1. Az összefonódottság bázisfüggetlen leírása	24
5.2. A teleportációs csatorna	27
5.3. A passzív szemlélet	29
5.4. POVM transzformációk	31
5.5. Linearitás és reverzibilitás	32

6. A teletranszformációs sémák osztályozása	33
6.1. Unitér reverzibilitás és mérésillesztés	33
6.2. Feltétel nélküli teleportáció	35
6.3. Egy nemlineáris példa	36
7. Állapotlevágás	39
7.1. Az állapotlevágás általános elmélete	39
7.2. Optikai állapotok levágása	40
7.2.1. Az első n komponens levágása	41
7.2.2. A $ 0\rangle$ és $ 1\rangle$ komponensek levágása	44
7.2.3. A $ 0\rangle$, $ 1\rangle$ és $ 2\rangle$ komponens levágása	45
7.2.4. A $ 0\rangle$ és $ 2\rangle$ komponens levágása	46
7.3. Állapottervezés levágással	47
8. Összefoglalás	49
Köszönetnyilvánítás	51
A. Függelék	52
A.1. A teleportációs csatorna kiszámítása	52
A.2. A csatorna linearitása	53
B. Függelék	55
Irodalomjegyzék	57
Név- és tárgymutató	62

1. Bevezetés

A kvantumoptika kísérleti módszereinek rohamos fejlődése lehetővé tette a kvantummechanika alapjelenségeinek közvetlen tanulmányozását. Ez hihetetlen fejlődést indított el a kvantuminformáció-elmélet terén, egyes kvantumalgoritmusok és kvantumkommunikációs eljárások ma már a gyakorlatban is kivitelezhetők. A diplomamunka témája szorosan kapcsolódik mindkét tudományterülethez.

A mérésből és az összefonódottságból erednek a kvantummechanika talán legérdekesebb vonásai. Két kvantumrendszer tiszta összefonódott állapotban van, ha a közös állapot nem kapható meg a részrendszerek tiszta állapotainak összetevésével. Einstein, Podolsky és Rosen [1] egy híres paradoxont fogalmazott meg ezzel kapcsolatban: ha egy adott speciálisan összefonódott állapotban van két részecske, akkor az egyikén végrehajtott mérés befolyásolja a másikon elvégezhető mérések kimenetelét. A Neumann-elv alapján szokás ezt úgy értelmezni, hogy az összefonódott pár egyik tagján elvégzett mérés hatására a másik állapota megváltozik.

Ez az alapja számos eljárásnak, mint például a kvantumteleportáció [2], az összefonódás kicserélődése [3], az összefonódás desztillálása [4] vagy a sűrű kódolás [5]. Ezek szoros kapcsolatban állnak egymással, és a kvantuminformáció-elmélet kiindulópontját képezik. A dolgozatban a *kvantumteleportációt* és a hozzá kapcsolódó *állapottranszformációkat* vizsgáljuk részletesen.

A kvantumteleportáció egy olyan kommunikációs protokoll, amely során egy kvantumrendszer állapotát a kvantumrendszer továbbítása nélkül juttatjuk el egyik helyről a másikra. Ideális esetben ehhez egy maximálisan összefonódott párt kell felhasználnunk, és a pár egyik felén, valamint a továbbítandó állapotban lévő rendszeren (a bemeneten) egy közös ún. Bell-mérést kell végrehajtanunk. Ez a mérés úgy változtatja meg a pár másik felének állapotát, hogy ezek után az és csak az fogja tartalmazni a kérdéses kvantumállapotot.

Nem ideális a teleportáció, ha csak részlegesen összefonódott állapotú a pár [6,7], vagy kevert állapotban van [8]. Ilyenkor a kommunikáció nem tökéletes, hanem torzít. Míg a teleportáció szempontjából e tökéletlenség hátrány, a kvantumállapotok tervezésében és bizonyos állapottranszformációk megvalósításban ezt céltudatosan kihasználhatjuk. A dolgozatban az ilyen „*teletranszformációs*” sémák kerülnek bemutatásra. Általánosan megvizsgáljuk tulajdonságait: annak feltételét, hogy a transzformáció reverzibilis, lineáris vagy éppen unitér legyen. Az utóbbi esetben egy unitér transzformációval visszaállíthatjuk az eredeti állapotot, és ez felel meg a tökéletes teleportációnak [9]. Megmutatjuk, hogy ez akkor áll fenn, ha az összefonódott pár és az elvégzett mérés kimenetele „*illeszkedik*” egymáshoz. Egyébként a transzformáció lineáris sem lesz.

Különösen érdekes és a kvantumállapot-tervezésben fontos az az eset, amikor a transzformáció irreverzibilis. Megvalósítható például egy olyan (probabilisztikus) transzformáció, amellyel a bemenet állapotát egy előre kiszemelt altérre vetíthetjük, miközben teleportáljuk. Ezt „*állapotlevágásnak*” hívjuk. Részletesen elemzünk egy olyan eszközt, amely az állapotlevágást a kvantumoptika keretein belül kísérletileg realiztikussá teszi. Ez a „*kvantumolló*” nyálábsztókból és foton számláló detektorokból áll. A mérés bizonyos kimenetele esetén a bemenet állapotának Fock-kifejtéséből csak az első néhány fotonszámú állapot jelenik meg a kimeneten. Kísérletileg legfeljebb csak a vákuum, az egyes és a kétfotonos állapot levágása vitelezhető ki. Segítségével „klasszikus” állapotból erősen nemklasszikus állapot állítható elő.

A dolgozat felépítése a következő. Először a használt eszköztárat és formalizmust ismertetjük: a 2. fejezet röviden felvázolja kvantummechanika valószínűségelméleti alapját, a 3. fejezet pedig a kvantumoptika elemeit foglalja össze. A dolgozat kiindulópontját, a kvantumteleportációt a 4. fejezetben mutatjuk be. Ezután tárgyaljuk a kutatási eredményeket, amelyek részben már publikáltuk [10,11]. A teleportáció által megvalósított transzformáció néhány általános tulajdonságát az 5. fejezetben vizsgáljuk, míg a 6. fejezet főként az unitéren visszaállítható sémákkal foglalkozik. A 7. fejezet szól az állapotlevágásról, végül az eredményeket a 8. fejezet összegzi.

2. A kvantummechanika valószínűségelméleti megközelítése

Ebben a szakaszban röviden felvázoljuk a kvantummechanika szemantikai és valószínűségelméleti megfogalmazását, és értelmezzük az állapot, a fizikai mennyiségek és a mérési események fogalmát. Bár a kvantummechanika szokásos tárgyalása (pl. [12–14]) mellőzi ezt a szemléletet, érdemes összefoglalás szintjén foglalkozni vele, mert új értelmet ad a kvantuminformáció-elméletben gyakran használt kiterjesztéseknek, mint például az általánosított (pozitív operátor értékű) mérésnek, és hasznos lehet a teleportáció és az abból származtatott állapottranszformációk több oldalról való megközelítésében, megértésében. További részletek tekintetében a széles szakirodalomra hivatkozom [15–22].

2.1. Kvantumlogika

2.1.1. Események

A fizika egyik feladata az, hogy a megfigyelések alapján modellt alkosson, és leírja a vizsgálat tárgyát képező rendszert. A megfigyelés (mérés) során kérdést teszünk fel a mikroszkopikus rendszernek, amire makroszkopikusan értelmezhető választ kapunk. Kérdés lehet például, hogy „ebben a térrészben van-e a részecske”, vagy hogy „mekkora az energia”. Ha elvégzünk egyetlen mérést, a kapott válasz a következő típusú: „az A fizikai mennyiség értéke az E halmazba esik” ($E \subset \mathbb{R}$ mérhető halmaz). Az ilyen típusú kijelentéseket *eseményeknek* nevezzük. Valószínűségelméleti terminológiával élve azt mondhatjuk, hogy egy esemény „bekövetkezik”, ha a megfelelő kijelentést kapjuk válaszul.

A lehetséges események \mathcal{L} halmazán egy matematikai struktúra is adott. Egyik esemény implikálhat egy másikat: ha az egyik bekövetkezik, akkor a másik is. Ez az események halmazán egy rendezési relációt (\leq) jelent. A legkisebb és a legnagyobb esemény a lehetetlen (0) és a biztos (I) esemény. Definiálhatjuk két, több, vagy akár megszámlálható sok $P_i \in \mathcal{L}$ esemény között az „és” (\wedge), ill. a „vagy” (\vee) műveletet:

$$\bigwedge_i P_i = \sup \{ Q \mid Q \leq P_i \text{ minden } i\text{-re} \}, \quad (2.1a)$$

$$\bigvee_i P_i = \inf \{ Q \mid Q \geq P_i \text{ minden } i\text{-re} \}. \quad (2.1b)$$

Az események halmazától megköveteljük, hogy ezek tetszőleges eseményekre létezzenek. Ezáltal az események egy ún. σ -teljes hálót alkotnak. A két művelet nem feltétlenül disztributív egymásra nézve. A hálót *disztributívnak* hívjuk, ha bármely $P, Q, R \in \mathcal{L}$ eseményre fennáll a következő két összefüggés:

$$(P \wedge Q) \vee R = (P \vee R) \wedge (Q \vee R), \quad (2.2a)$$

$$(P \vee Q) \wedge R = (P \wedge R) \vee (Q \wedge R). \quad (2.2b)$$

Látni fogjuk, hogy míg a klasszikus mechanika eseményhálója disztributív, a kvantummechanikáé nem.

Egy P esemény *komplementerét* (P^\perp) a következő tulajdonságok definiálják: (i) $(P^\perp)^\perp = P$, (ii) ha $P \leq Q$, akkor $Q^\perp \leq P^\perp$, (iii) $P \wedge P^\perp = 0$, (iv) $P \vee P^\perp = I$. Két esemény (P és Q) *egymást kizárja*, ha $P \leq Q^\perp$. Megköveteljük még az *ortomodularitást* is, azaz azt, hogy $P \leq Q$ esetén $Q = P \vee (Q \wedge P^\perp)$.

Egy fizikai modell megalkotásakor elsőként a lehetséges események halmazát kell megadnunk. Ezt a fizikai mennyiségek értékére vonatkozó kijelentéseken keresztül fogtuk meg. A számolások megkönnyítése érdekében célszerű egy izomorf hálót (például halmazalgebrát vagy projektorhálót) bevezetni.

2.2. Fizikai mennyiség és állapot

A *fizikai mennyiség* (obszervábilis) fogalmát ezek után a következőképpen értelmezhetjük: a (valós értékű) A fizikai mennyiség megadja, hogy melyik az

az esemény, hogy „az A értéke az E halmazban van”. Ez matematikailag egy a valós számok Borel-halmazából az eseményhálóba képező homomorfizmus

$$A : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}, \quad E \mapsto \{\text{„az } A \text{ értéke az } E \text{ halmazban van”}\}, \quad (2.3)$$

amely megtartja a hálóműveleteket: $E, F \subset \mathbb{R}$ mérhető részhalmazok esetén $A(E \cap F) = A(E) \wedge A(F)$, $A(E \cup F) = A(E) \vee A(F)$ és $A(\mathbb{R} \setminus E) = A(E)^\perp$.

A rendszer mérése során megfigyelhetjük, hogy melyik esemény következik be. Azt, hogy melyik esemény milyen valószínűséggel fordul elő, az *állapot* határozza meg. Amennyiben leírásunk a rendszerről *teljes*, úgy két állapot pontosan akkor különböző, ha méréssel megkülönböztethető, vagyis: van olyan esemény, aminek a két állapotban különböző a valószínűsége. Az állapot tehát az eseménytérén adott valószínűségi mérték:

$$p : \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]. \quad (2.4)$$

Ezek alapján egy A fizikai mennyiség eloszlását a $p \circ A : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ valószínűségi eloszlás határozza meg. Ebből könnyen kiszámolható a fizikai mennyiség várhatóértéke és momentumai.

2.2.1. Klasszikus és kvantummechanika

A fizikai rendszer leírásánál első feladatunk konkrétan megadni az eseményeket. A klasszikus és kvantummechanikát egyaránt ortomoduláris σ -teljes háló írja le. Ezt az olyan típusú válaszok generálják, hogy „az A fizikai mennyiség értéke az E halmazban van”.

Mérési tapasztalat, hogy a klasszikus eseményháló disztributív. Ezért a klasszikus eseményhálót egy halmazalgebrával azonosítjuk. Jelöljük a szokásos fázistérrel Γ -val ($\Gamma = \mathbb{R}^{6N}$). A q általános koordináták és a hozzá kanonikusan konjugált p impulzusok alkotta (q, p) pár ennek a fázistérnek eleme. Az eseményhálót a fázistér mérhető részhalmazai alkotják, az „és” (\wedge) és „vagy” (\vee) művelet a halmazelméleti metszet (\cap) és unió (\cup), a komplementálás (\perp) a halmazelméleti komplementálás.

Az állapot, amely a fázistér részhalmazaihoz rendel valószínűségeket, megadható például egy $f(q, p)$ valószínűségeloszlás-függvénnyel. Egy a fizikai

mennyiség szokás szerint a fázistéren értelmezett valós értékű mérhető függvény. Adott $E \subset \mathbb{R}$ részhalmaz esetén $a^{-1}(E)$ jelenti azt az eseményt, hogy „ a értéke az E halmazba esik”.

A kvantummechanika egyik jellemző vonása, hogy vannak egyszerre nem mérhető események: ha P és Q kanonikusan konjugált mennyiségekhez tartozó események, akkor a „ P és Q ” együttes esemény a lehetetlen esemény ($P \wedge Q = 0$, sőt $P^\perp \wedge Q = 0$). Emiatt az események nem alkotnak disztributív hálót, hiszen $(P \wedge Q) \vee (P^\perp \wedge Q) = 0$, ugyanakkor $(P \vee P^\perp) \wedge Q = Q$. Az eseményhálónak egy nem disztributív hálót kell választani, amit szokásosan valamely \mathcal{H} (legfeljebb megszámlálható dimenziós) Hilbert-tér zárt lineáris altereire vetítő önadjungált projektorok alkotnak.

Mivel az operátorok algebrát alkotnak, a hálóműveletek algebrai úton is kiszámíthatók. A \hat{P} esemény mint projektor ortogonális komplementere $\hat{I} - \hat{P}$. \hat{P} és \hat{Q} kizáró események, ha $\hat{P}\hat{Q} = 0$. Az „és” kapcsolat már bonyolultabb:

$$\hat{P} \wedge \hat{Q} = \lim_n (\hat{P}\hat{Q})^n = \lim_n (\hat{Q}\hat{P})^n = \lim_n (\hat{Q}\hat{P}\hat{Q})^n = \lim_n (\hat{P}\hat{Q}\hat{P})^n, \quad (2.5)$$

ami $\hat{P}\hat{Q}$ -ra egyszerűsödik, ha \hat{P} és \hat{Q} kommutál. A „vagy” művelet a de Morgan-azonosságból kapható.

Az állapot a projektorokon értelmezett p valószínűségi mérték. A Gleason-tétel (Gleason, 1957) értelmében ($\dim \mathcal{H} > 2$ esetén) adott p -hez egyértelműen létezik egy $\hat{\rho}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ *sűrűségoperátor* (egységnyi nyomú, pozitív szemidefinit, korlátos lineáris operátor), amellyel egy tetszőleges \hat{P} esemény valószínűsége a következő nyomformulával adható meg:

$$p(\hat{P}) = \text{Tr}(\hat{P}\hat{\rho}). \quad (2.6)$$

A valós fizikai mennyiségek a valós számok mérhető részhalmazaihoz rendelnek projektorokat. Mivel egymásra ortogonális projektorok összege projektor, a fizikai mennyiségek egyben projektor értékű mértékek (röviden *projektormértékek*) is.

Tegyük fel, hogy az A fizikai mennyiség véges sokféle értéket vehet fel. Jelöljük ezeket a *sajátértékeket* a_i -vel, és jelöljük \hat{P}_i -vel azt az eseményt (projektor), hogy „ A az a_i értéket vette fel”. Ekkor az $\hat{A} = \sum_i a_i \hat{P}_i$ önadjungált operátor egyértelműen meghatározza az A fizikai mennyiséget sajátértékproblémája

révén. A spektráltétel szerint ez általánosan is igaz: minden projektormérték egyértelműen megadható egy önadjungált operátorral. A fizikai mennyiség várható értéke a nyomformula alapján éppen $\langle A \rangle = \text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho})$.

Tekintsünk egy véges dimenziós Hilbert-teret. Ekkor a fizikai mennyiségek csak véges sokféle értéket vehetnek fel. A különböző mérési kimeneteknek megfelelő eseményeket jelölje \hat{P}_i . Kihhasználva, hogy a projektormérték művelettartó, következő teljességi relációt kapjuk:

$$\sum_i \hat{P}_i = \hat{I}, \quad \hat{P}_i \hat{P}_j = \delta_{ij} \hat{P}_i. \quad (2.7)$$

Ezek alkotják a fizikai mennyiség *projektorfelbontását*. Ebből következik, hogy egy fizikai mennyiségnek legfeljebb annyi féle különböző értéke lehet, amennyi a Hilbert-tér dimenziója. Egy a (2.7) feltételnek eleget tevő projektorrendszer lényegében megadja a fizikai mennyiséget.

2.3. Pozitív operátor értékű mértékek

Az események eddig projektorok voltak, és egy adott $\hat{\rho}$ állapotban a \hat{P} esemény valószínűsége $\text{Tr}(\hat{P}\hat{\rho})$. Ha \hat{P} nem a lehetetlen esemény, akkor létezik olyan $\hat{\rho} = |\phi\rangle\langle\phi|$ állapot ($\phi \in \text{Ran } P$), amelyben \hat{P} valószínűsége egy. A fizikai mennyiségek valóságos mérésekor azonban gyakran előfordul, hogy a veszteségek miatt valamely esemény valószínűsége minden állapotban egynél kisebb. Szükséges tehát, hogy kibővítsük az események halmazát. A Gleasson-tétel értelmében a sűrűségoperátor és az események (projektorok) ugyanazon a Hilbert-téren vannak értelmezve. Ha az események hálóját kibővítjük valamely nagyobb Hilbert-tér projektorhálójára, akkor ezáltal az állapotok tere is bővebb lesz. Felmerül a kérdés, vajon ki lehet-e terjeszteni az események terét úgy, hogy közben a lehetséges állapotok ugyanazok maradjanak.

A válasz pozitív. A megoldást a méréssel kapcsolatos fizikai intuíció adja. A veszteséges méréseknél a mérendő rendszer összefonódik környezetével, és az együttes rendszeren végezzük a mérést. Tegyük fel, hogy a mérendő rendszer állapota $\hat{\rho}$, a környezeté $\hat{\rho}'$. Végezzünk el egy közös mérést. A kimenetelnek megfelelő esemény a tenzorszorzat Hilbert-téren értelmezett $\hat{\Pi}$ projektor, amely a $\hat{\Pi} = \sum_i \hat{E}_i \otimes \hat{E}'_i$ alakba írható (\hat{E}_i a mérendő rendszer Hilbert-terén

értelmezett operátor, \hat{E}'_i pedig a környezetén). A $\hat{\Pi}$ esemény valószínűsége:

$$\text{Tr}(\hat{\Pi}(\hat{\rho} \otimes \hat{\rho}')) = \sum_i \text{Tr}(\hat{E}_i \hat{\rho}) \text{Tr}(\hat{E}'_i \hat{\rho}') = \text{Tr}(\hat{E} \hat{\rho}), \quad (2.8)$$

ahol $\hat{E} = \sum_i \text{Tr}(\hat{E}'_i \hat{\rho}') \hat{E}_i$ önadjungált pozitív szemidefinit operátor (röviden *pozitív operátor*), amelynek a normája nem nagyobb egynél. Ez írja le a vizsgált rendszer szintjén azt az eseményt, amikor a környezettel együtt mérünk, és a környezetet utána elhagyjuk.

Az eredmény fordítva is megfogalmazható (Neumark-tétel, 1940). Legyen \hat{E}_i pozitív operátorok egy teljes rendszere, azaz teljesüljön rá a következő teljességi reláció :

$$\sum_i \hat{E}_i = \hat{I}. \quad (2.9)$$

Ekkor megadható egy környezet és a közös rendszeren ható $\hat{\Pi}_i$ projektorok (2.7) szerint teljes rendszere, amelyből a pozitív operátorok a fenti módon származtathatók. Ez egy mérési eljárást ad a pozitív operátorok mint események realizálására. Ezzel tehát valóban kibővítettük az események halmazát.

Az állapot mint valószínűségi mérték értelmezési tartományának kibővítése a (2.8) egyenletből egyértelműen következik. Egy \hat{E} általánosított esemény valószínűségét a ρ állapotban a nyomformulával adhatjuk meg:

$$p(\hat{E}) = \text{Tr}(\hat{E} \hat{\rho}). \quad (2.10)$$

Az eseménytér kiterjesztésével tágul a fizikai mennyiségek halmaza is: nemcsak a projektor értékű mértékekkel számolhatunk, hanem az általánosabb *pozitív operátor értékű mértékekkel* (röviden *POVM*, Positive Operator Valued Measure) is. A pozitív operátorok (2.9) teljességi relációja miatt véges dimenziós Hilbert-tér esetén a dimenziók számánál többféle értéket is felvehetnek a fizikai mennyiségek. Emiatt egyetlen mérés által több információhoz juthatunk, mint projektormértékek esetén.

3. A kvantumoptika alapjai

A kvantumoptika a fényt és a fény anyaggal való kölcsönhatását vizsgálja. Kísérleti módszereinek rohamos fejlődése lehetővé tette a kvantummechanika alapjelenségeinek közvetlen tanulmányozását. A kísérleti kivitelezhetőség érdekében érdemes a kvantumoptika jól megalapozott eszköztárát alkalmazni elméleti számítások során is. Ebben a fejezetben röviden áttekintjük ennek néhány alapfogalmát, amik a kvantumteleportáció és az állapottranszformáció elvének, jelentőségének megértéséhez szükségesek. Először bemutatunk egy egyszerű modellt az üregrezonátorban lévő elektromágneses tér kvantummechanikai leírására, és bevezetjük az optikai módus fogalmát. A modell részletes elemzése megtalálható a szakirodalomban [22–24]. Szó esik néhány speciális állapot kísérleti előállításáról és a fotodetektálás lehetőségeiről is. Az optikai eszközök mint kölcsönhatás szerepét a veszteségmentes nyalábosztókon mutatjuk be.

3.1. Az elektromágneses tér kvantálása véges térben

Az elektromágneses teret leíró koordináták, az \mathbf{E} elektromos és \mathbf{H} mágneses térerősség dinamikáját a Maxwell-egyenletek adják meg:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad (3.1\text{a,b})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}. \quad (3.1\text{c,d})$$

Egy ideális vezetővel körülvett véges Ω térrészben (*üregrezonátorban*) a Maxwell-egyenleteket ki kell egészíteni a határfeltételekkel: az elektromos térerősség a falra merőleges, a mágneses azzal párhuzamos. A $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ konstans

bevezetésével a (3.1a–d) egyenletek az alábbi Helmholtz-egyenletekre redukálhatók:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}, \quad (3.2a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H}. \quad (3.2b)$$

Ha a vizsgált Ω térrész kellően sima, a Laplace-operátornak (∇^2) a határfeltételeket kielégítő sajátfüggvényei ortogonális függvényrendszert alkotnak. Jelöljük az ω_ν ($\nu \in \mathbb{N}$) sajátértékhez tartozó dimenziótlan sajátfüggvényeket \mathbf{E}_ν -vel és \mathbf{H}_ν -vel. (A két függvény más-más határfeltételnek tesz eleget!) Ezeket nevezzük *módusfüggvényeknek*. Normáljuk őket a következőképpen:

$$\int_{\Omega} \mathbf{E}_\nu(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{\nu'}(\mathbf{r}) d^3r = \int_{\Omega} \mathbf{H}_\nu(\mathbf{r}) \mathbf{H}_{\nu'}(\mathbf{r}) d^3r = \delta_{\nu,\nu'} V, \quad (3.3)$$

ahol V az üreg térfogata. Például téglatest alakú üregben a módusfüggvények térkomponensei szinusz és koszinusz függvények. A (3.2a–b) egyenleteket és a határfeltételt kielégítő általános megoldások a módusfüggvények lineáris kombinációi:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \sum_{\nu} \frac{1}{\varepsilon V} p_{\nu}(t) \mathbf{E}_{\nu}(\mathbf{r}), \quad (3.4a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = - \sum_{\nu} \frac{1}{\mu V} \omega_{\nu} q_{\nu}(t) \mathbf{H}_{\nu}(\mathbf{r}). \quad (3.4b)$$

A q_{ν} és p_{ν} kifejtési együtthatók az elektromágneses tér általános koordinátái és kanonikus impulzusai. A teljes elektromágneses tér energiája:

$$H = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu} p_{\nu}^2 + \omega_{\nu}^2 q_{\nu}. \quad (3.5)$$

A koordináták és impulzusok időfejlődését a (3.2a,b) Helmholtz-egyenletek és a (3.5) Hamilton-függvény egyaránt megadja:

$$\dot{q}_{\nu} = p_{\nu}, \quad \dot{p}_{\nu} = -\omega_{\nu}^2 q_{\nu}. \quad (3.5a-b)$$

Az elektromágneses mező tehát egymástól független harmonikus oszcillátorok összessége. A különböző módusfüggvényhez tartozó harmonikus oszcillátorokat *módusoknak* nevezzük.

A szabad elektromágneses tér kvantálását módusonként az általános koordinátákon és impulzusokon végezzük: helyettük bevezetjük a \hat{q}_ν és \hat{p}_ν önadjungált operátorokat, amelyek a $[\hat{q}_\nu, \hat{p}_{\nu'}] = \delta_{\nu, \nu'}$ kanonikus csererelációnak tesznek eleget. Ezután áttérünk a léptető operátorokra:

$$\hat{a}_\nu = \sqrt{\frac{\omega_\nu}{2\hbar}} \hat{q}_\nu + \frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega_\nu}} \hat{p}_\nu, \quad (3.6)$$

$$\hat{a}_\nu^\dagger = \sqrt{\frac{\omega_\nu}{2\hbar}} \hat{q}_\nu - \frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega_\nu}} \hat{p}_\nu. \quad (3.7)$$

Az állapotok \mathcal{H} Hilbert-tere, amin ezek az operátorok értelmezve vannak, a szokásos *Fock-tér*. A Hamilton-operátor könnyen megadható a léptető operátorok segítségével:

$$\hat{H} = \sum_\nu \hbar\omega_\nu \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\nu. \quad (3.8)$$

A Hamilton-operátor spektruma alulról korlátos, alapállapota nem degenerált. Ezt az állapotot nevezzük *vákuumnak* ($|0\rangle$). Ebből az \hat{a}_ν^\dagger keltő operátorok segítségével megadhatjuk az összes energia-sajátállapotot:

$$|n_1, n_2, \dots, n_\nu, \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots n_\nu! \dots}} \hat{a}_1^{\dagger n_1} \hat{a}_2^{\dagger n_2} \dots \hat{a}_\nu^{\dagger n_\nu} \dots |0\rangle. \quad (3.9)$$

Ez a betöltésszám-reprezentáció: a ν -edik módus az n_ν -edik gerjesztett állapotban van. Az elektromágneses tér módusainak elemi gerjesztéseit *fotonnak* hívjuk. A (3.9) bázist szokás még *fotonszámbázisnak* vagy *Fock-bázisnak* hívni.

Bár egy üregrezonátorban megszámlálható sok módus van, ezek szabad tér esetén függetlenek egymástól. Ha az optikai eszközök csak néhány módus között létesítenek kölcsönhatást, akkor elegendő csupán ezeket figyelembe venni. A továbbiakban véges sok módussal foglalkozunk.

3.2. Nevezetes állapotok a kvantumoptikában

Bár a dolgozatnak nem tárgya, hogy milyen fényállapotok miként állíthatók elő, a kísérleti megvalósíthatóság szempontjából fontos néhányat megemlíteni. Először egyetlen módus kvantumállapotait vizsgáljuk, majd egy kétmódusú állapotot.

- (i) *Koherens állapot* ($|\alpha\rangle$, $\alpha \in \mathbb{C}$). Az \hat{a} eltüntető operátor sajátállapota: $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$. Fotonzámbázisban kifejtett alakja:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.10)$$

Haladó hullámú koherens állapotokat pl. ideális monokromatikus lézerekkel állíthatunk elő, de a közismert dipólsugárzás is ilyen. Ezek a klasszikus koherens síkhullámnak felelnek meg, intenzitásuk $|\alpha|^2$ -tel arányos.

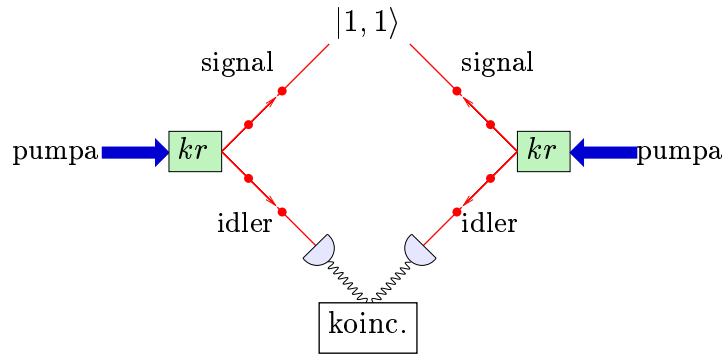
- (ii) *Fock-állapot* ($|n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$). Az $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ fotonszám-operátor sajátállapota: $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$. A $|0\rangle$ vákuumállapotból a keltő operátorral fejezhető ki:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{a}^{\dagger n} |0\rangle. \quad (3.11)$$

Mivel \hat{n} önadjungált, a Fock-állapotok teljes ortogonális rendszert alkotnak. A koherens állapotokkal szemben tipikusan nemklasszikus állapotok, ezért kísérleti előállításuk nehézkes. Nagy n esetén $|n\rangle$ „instabil”, mert a környezeti hatások, veszteségek miatt könnyen redukálódik klasszikus állapotra. A Fock-állapotok előállíthatók unitér időfejlődéssel [25], koherens állapotok szuperpozíciójaként [26] (koherens állapotok szuperpozíciója megvalósítható pl. üregrezonátorokban [27]), vagy nem unitér mérési folyamat segítségével [28].

- (iii) *Összenyomott („squeezed”) vákuum*. Nemklasszikus fényállapot, amely nemlineáris kristályokban ún. parametrikus konverzióval [22] állítható elő [29,30]. Ezt a folyamatot $\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2}$ alakú kölcsönhatási Hamilton-operátor írja le, ezért az összenyomott vákuum Fock-kifejtésében csak a páros fotonszámú Fock-állapotok szerepelnek: $c_0|0\rangle + c_2|2\rangle + c_4|4\rangle + \dots$. Mivel másodrendű folyamatról van szó, a legtöbb kísérleti megvalósításnál $|c_0|$ sokkal nagyobb $|c_2|$ -nél, és a többi együttható mellettük elhanyagolható, így ez az állapot gyakorlatilag csak a vákuum és a $|2\rangle$ állapot szuperpozíciója.

(iv) Az $|1, 1\rangle$ kétmódusú Fock-állapot. Előállításához két független módust kell preparálni az $|1\rangle$ Fock-állapotba. Az $|1\rangle$ állapotot parametrikus konverzióval egyszerűen létre lehet hozni. Ha a konverzióval nyert fotonpárok különböző irányba repülnek szét, akkor a kapott kétmódusú állapot $c_0 |0, 0\rangle + c_2 |1, 1\rangle + \dots$ alakú. Az egyik módusban („idler”) az $|1\rangle$ állapotot detektálva biztosak lehetünk benne, hogy a másik módus („signal”) is $|1\rangle$ állapotban van, azaz az $|1\rangle$ állapotot sikeresen előállítottuk. Az $|1, 1\rangle$ állapot létrehozásához két független (signal) módust kell az $|1\rangle$ állapotba vinni, miközben a megfelelő (idler) detektorok koincidenciát mutatnak (3.1. ábra) [31–33].



3.1. ábra: Az $|1, 1\rangle$ állapot előállítása. A két kr nemlineáris kristályt intenzív lézertényel megvilágítva egy-egy fotonpár keletkezik. A signal módusokban lévő egy-egy foton egyszerre keletkezett, ha a detektorok egyszerre szólalnak meg. Az egyidejűséget elősegíti, ha a két pompa ugyanabból az ultrarövid impulzusból származik.

A kvantummechanikai mérés fogalma napjainkban is vitatott. Kísérleti tény azonban, hogy a megfigyelés megváltoztatja a vizsgált kvantumrendszer állapotát. Számításaink során általában egy széles körben elfogadott elvet, a *Neumann-féle projekciós elvet* alkalmazzuk. Eszerint az energia (fotonszám) ideális mérésekor a módus állapota „beugrik” a mérési eredménynek megfelelő fotonszám-sajátállapotba.

A gyakorlatban ez az ideális mérés messze nem valósítható meg. A kvantumoptikai kísérletekben használatos detektorok két fő csoportba sorolhatók. Az egyik *klasszikus intenzitás* mérésére alkalmas, mert nagy fotonszámok esetén

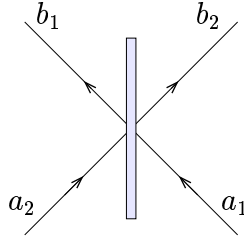
a detektor jelének nagysága a bemeneti fotonszámmal arányos. Leggyakoribbak a fotoelektron-sokszorozók és a félvezető detektorok. Egyes fotodiódák (pl. $p-i-n$ fotodiódák) kvantumhatásfoka elérheti a 95%-ot is. Az alacsony fotonszámnál jelentőssé váló ún. sötétzaj miatt azonban kis intenzitás mérésére alkalmatlanok.

A detektorok másik csoportja az *egyfoton-számlálók* vagy *fotonérzékenységű* detektorok. Erősen metastabil rendszerekben (pl. túlfeszített fotoelektron-sokszorozó) egyetlen foton is képes mérhető makroszkopikus változásokat okozni. Ilyen elven működnek a Geiger-módban alkalmazott lavinadiódák. Egyes szilárd anyagú fotoelektron-sokszorozók hatásfoka elérheti a 75%-ot is [34]. Legnagyobb hátrányuk azonban az, hogy nem tudnak különbséget tenni egy és két foton között, mert két foton is ugyanakkora lavinát indít, mint egy.

A kvantumolló (7. fejezet) kísérleti megvalósításához olyan detektorokra lenne szükség, amik nagy hatásfokkal képesek megkülönböztetni a vákuumállapotot, az egy fotonos és a több fotonos állapotokat. Az ilyeneket — a fotonérzékenységű detektoroktól megkülönböztetendő — *fotonfelbontású* detektoroknak nevezhetjük. Bár ezek alkalmazása nem elterjedt, ígéretes előrelépés tapasztalható az irodalomban mind az eszközök [34,35] mind a módszerek [31,36,37] tekintetében. Például lineáris módban használt lavinadiódák jelalakjából a fotonstatisztika visszaszámolható [35]. Egy új módszer [36] szerint ha a mérendő jel egy multiport egyetlen bemenete, és a multiport kimeneteit egy-egy fotonérzékenységű detektor méri, akkor a fotonstatisztika és a fázisviszonyok is mérhetőek. Ennek az elrendezésnek a hatékonyságát és hibáit tárgyalja [37]. Az egy és két foton megkülönböztetése tehát nem elvi akadály, csupán gyakorlati nehézség.

3.3. Veszteségmentes nyálábosztók

A kvantumoptikában használatos veszteségmentes passzív optikai eszközök a különböző módusok között csatolást valósítanak meg. Hatásuk kölcsönhatási Hamilton-operátorral adható meg, amely a $t = \pm\infty$ határesetben eltűnik. Számításaink során Heisenberg-képben dolgozunk, így az operátorok fejlődnek



3.2. ábra: A veszteségmentes nyalábosztó jelölései. A két bemeneti eltüntető operátor \hat{a}_1 és \hat{a}_2 , a két kimeneti pedig \hat{b}_1 és \hat{b}_2 . Közöttük $SU(2)$ transzformáció létesít kapcsolatot a (3.12) egyenlet szerint.

időben. Az optikai eszköz hatásának leírásához elegendő megadni a léptető operátorokat a $t = -\infty$ (bemeneti) és a $t = +\infty$ (kimeneti) határesetben. Jelöljük az előbbieket \hat{a}_i -vel és \hat{a}_i^\dagger -tel, az utóbbiakat \hat{b}_i -vel és \hat{b}_i^\dagger -tel. Ennek megfelelően a bemeneti és kimeneti fotonszámbázis is különböző, ezért értelmes a fotonszámok megváltozásáról beszélni: bár az állapot állandó, a Fock-együtthatók a két határesetben mások. Ha szükséges, az állapotok megadásánál alsó indexben jelöljük a megfelelő léptető operátor és módus betűjét:

$$|n\rangle_{a_1} = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{a}_1^{\dagger n} |0\rangle, \quad |n\rangle_{b_2} = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{b}_2^{\dagger n} |0\rangle. \quad (3.11a,b)$$

A veszteségmentes nyalábosztó (3.2. ábra) egy két bemenetű és két kimenetű passzív optikai eszköz. A módusok léptető operátorainak kommutációs relációja miatt hatását általánosan egy $SU(2)$ transzformációval adhatjuk meg [38], amely a bemeneti és kimeneti léptető operátorok között teremt kapcsolatot:

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix} = R_{\tau, \phi_t, \phi_r} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

ahol R az $SU(2)$ csoport definiáló ábrázolása:

$$R_{\tau, \phi_t, \phi_r} = \begin{pmatrix} e^{i\phi_t} \cos \tau & e^{i\phi_r} \sin \tau \\ -e^{-i\phi_r} \sin \tau & e^{-i\phi_t} \cos \tau \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

A paraméterek fizikai jelentése a következő: a nyalábosztó áteresztőképessége (transzmittivitása) $\cos^2 \tau$, a visszaverési együtthatója (reflektanciája) $\sin^2 \tau$,

az átmenő és a visszavert nyaláb fázistolása pedig ϕ_t , ill. ϕ_r . Kísérletileg minden SU(2) transzformáció megvalósítható nyalábosztóval, és adott nyalábosztó esetén a ϕ_t és ϕ_r fázisparamétereket a nyalábosztó elé és után tett fázistolókkal állíthatjuk be. Szimmetrikus nyalábosztó esetén például a transzmittancia $\frac{1}{2}$ (azaz $\tau = \pi/4$), a fázistolások $\phi_t = 0$ és $\phi_r = \pi/2$, így ennek mátrixa

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Mivel a fázistolások tetszőlegesen beállíthatók, a dolgozatban az egyszerűség kedvéért elsősorban valós mátrixokat használunk. A fázistolásmentes szimmetrikus nyalábosztó mátrixa

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Mivel a nyalábosztó megváltoztatja a fotonszám-operátort, hatása felírható fotonszámokkal is. (3.15) a következő transzformációt valósítja meg néhány Fock-állapoton:

$$\begin{aligned} |0, 0\rangle_a &\longmapsto |0, 0\rangle_b, \\ |0, 1\rangle_a &\longmapsto (|0, 1\rangle_b + |1, 0\rangle_b) / \sqrt{2}, \\ |1, 0\rangle_a &\longmapsto (|0, 1\rangle_b - |1, 0\rangle_b) / \sqrt{2}, \\ |1, 1\rangle_a &\longmapsto (|2, 0\rangle_b - |0, 2\rangle_b) / \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (3.15a-d)$$

4. Kvantumteleportáció

A dolgozat fő célja a teleportáció és a hozzá kapcsolódó állapottranszformációk leírása. Jelen fejezet bevezeti az összefonódott állapotok és a teleportáció fogalmát, majd osztályozza a különböző teleportációs sémákat. Definiáljuk a megbízhatóság fogalmát, amely e művelet pontosságát fejezi ki. Összehasonlítjuk a feltétel nélküli és a feltételes teleportációt.

4.1. Összefonódott állapotok

Két kvantumrendszer tiszta összefonódott állapotban van, ha a közös állapot nem kapható meg a részrendszerek tiszta állapotainak összetevésével, azaz a közös állapot nem szorzat alakú. Ehhez és a méréshez kapcsolódnak a kvantummechanika talán legérdekesebb vonásai. Példaként érdemes megemlíteni Einstein, Podolsky és Rosen (EPR) híres paradoxonát [1], amelyet Bohm a következőképpen egyszerűsített [39]. Tegyük fel, hogy egy nulla spinű részecske úgy bomlik két ugyanolyan feles spinűre, hogy a keletkező részek egy tiszta összefonódott állapotban vannak, ám külön-külön mindketten teljesen határozatlan állapotúak. Az impulzusmomentum megmaradása miatt a két bomlástermék spinje ellenkező irányú: ha az egyiket elvégezzük egy mérést, amely azt az eredményt adja, hogy a spin iránya felfelé mutat, akkor a másikon elvégzett bármely mérés olyan eredményeket ad, mint amilyeneket egy lefelé mutató spinű adna. Ez azt jelenti, hogy az egyik részecskén elvégzett mérés eredménye befolyásolja a másikon elvégezhető mérések kimenetelét. Ha az első részecske spinjének z komponensét mérjük, akkor a második z spinkomponense határozott értékű fizikai mennyiség lesz, ám ha az elsőt x irányban vizsgáljuk, akkor a második részecske x spinkomponense lesz határozott. Ha a kvantummechanika kauzális és lokális elmélet, akkor a második részecske leírá-

sának nem szabad függnie a tőle térszerűen szeparát első részecskétől. Ekkor viszont paradox módon a második részecskét éppen úgy jellemzi a z spinkomponens határozott értéke, mint a vele nem kompatibilis, egyszerre nem mérhető x spinkomponens határozott értéke.

A paradoxon feloldása Einstein, Podolsky és Rosen szerint az, hogy a kvantummechanikai leírás nem teljes, és a korrelációk megmagyarázhatók lokális *rejtett paraméterekkel*. Bell megmutatta [40], hogy a rejtett paraméteres elméletekben az EPR-kísérlet eredményei kielégítik az ún. *Bell-egyenlőtlenséget* [40,41], míg a kvantummechanika elmélete és a mérési eredmények is sértik ezt [42].

Nézzük meg részletesebben a keletkező két részecske állapotát. Jelölje $|\uparrow\rangle$ és $|\downarrow\rangle$ azt az egyrészecskés állapotot, amelyben a spin felfelé, ill. lefelé mutat, és tekintsünk el a részecskék többi szabadsági fokától. Mivel az összes impulzusmomentum zérus, a kétrészecskés állapot a következő *szinglett* állapot (az A és B indexek az első, ill. második rendszerre utalnak):

$$|\Psi_{-}\rangle_{AB} = (|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B) / \sqrt{2}. \quad (4.1)$$

Ha egy kétrészecskés állapot két egyrészecskés állapot szorzata, akkor *szeparábilis állapotról* beszélünk, ellenkező esetben *összefonódott állapotról*. Tovább menve, két részecske *maximálisan összefonódott*, ha a kettő együtt tiszta állapotban van, ám külön-külön teljesen határozatlan, kevert állapotban vannak, azaz a közös sűrűségoperátor parciális nyomai az identitással arányosak. Ez természetesen csak akkor teljesülhet, ha a két rendszer Hilbert-terének dimenziója megegyezik és véges. A (4.1) állapot ilyen.

Az összetett rendszerek kvantuminformáció-elméleti tárgyalásánál fontos szerepe van a maximálisan összefonódott állapotok alkotta teljes ortonormált rendszereknek. Az ilyeneket *Bell-bázisnak* hívják, a bázist alkotó állapotokat pedig *Bell-állapotoknak* nevezzük. Kétállapotú rendszerek esetén mindig található olyan $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ bázis, amelyben a négy Bell-állapot a következő nevezetes alakot ölti:

$$|\Psi_{\pm}\rangle_{AB} = (|1\rangle_A |0\rangle_B \pm |0\rangle_A |1\rangle_B) / \sqrt{2}, \quad (4.2a,b)$$

$$|\Phi_{\pm}\rangle_{AB} = (|0\rangle_A |0\rangle_B \pm |1\rangle_A |1\rangle_B) / \sqrt{2}. \quad (4.2c,d)$$

Általánosan n dimenziós Hilbert-terek esetén a Bell-állapotok egy lehetséges rendszerét a következőképpen adhatjuk meg:

$$|\Psi_{j,k}\rangle_{AB} = \sum_{l=0}^{n-1} e^{2\pi i kl/n} |l\rangle_A |(l+j) \bmod n\rangle_B / \sqrt{n}, \quad (4.3)$$

ahol $i, j = 0, \dots, n-1$.

Érdeemes megjegyezni, hogy a kvantumoptikában passzív optikai eszközök (például nyalábosztók) és fotonszámláló detektorok felhasználásával nem konstruálható olyan mérési összeállítás (*Bell-mérés*), ami Bell-állapotokra vetít, és a mérési kimenetek nem degeneráltak [43].

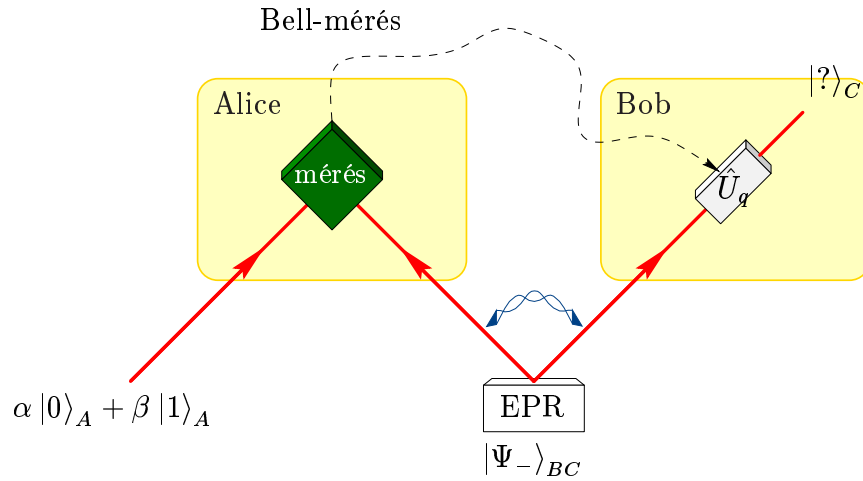
4.2. Kétállapotú rendszer teleportációja

A kvantumszámítógépekben az információt kvantumoz rendszerekben tárolják. Egy kétállapotú kvantumrendszer tiszta állapotát két valós számmal adhatjuk meg: például $\cos \theta |0\rangle + e^{i\phi} \sin \theta |1\rangle$ valamely $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ bázisban. A kvantuminformáció-elmélet szempontjából az ilyen rendszerek egyenértékűek függetlenül attól, hogy a konkrét realizációban elektronspinről vagy foton polarizációjáról van szó. Ezért egy kétállapotú rendszert általánosan *kvantumbitnek* (*qubit*), a kvantumoz információ legkisebb egységének nevezzük. Egy ezen elvégzett mérés eredménye csak két féle lehet: a méréssel kinyerhető információ éppen egy *bitnyi*.

A hagyományos értelemben vett (klasszikus) információt, amit bitekkel reprezentálhatunk, makroszkopikus eszközökkel nagy távolságokra tudjuk továbbítani. Erre szolgál a klasszikus kommunikáció (klasszikus csatorna), amely történhet az emberi beszéd által, telefonon, rádión keresztül stb. Felmerül a kérdés, vajon klasszikus kommunikáció segítségével a kvantumállapot is eljuttatható-e egyik helyről a másikra anélkül, hogy a kvantumoz információt tároló kvantumrendszert továbbítanánk. Kézenfekvő lenne, ha meg tudnánk mérni a teljes kvantumállapotot, majd az eredményt, a tiszta állapotot leíró két valós számot mint klasszikus információt továbbítanánk, végül egy másik rendszert preparálnánk az eredetivel megegyező állapotba. A kvantummechanikai mérés azonban nem ad teljes leírást az állapotról, ezért ez a gondolatmenet nem alkalmazható.

Az összefonódás és a mérés révén a feladat mégis megvalósítható. A művelet során a mérés hatására a kvantum információt eredetileg hordozó rendszer állapota megváltozik, és a továbbított információ csak a távoli helyen lévő másik rendszer állapotában jelenik meg. Ezáltal — a klasszikustól eltérően — a kommunikáció során az információ másolására nincs lehetőség.

Most Bennett és társai [2] eredményét ismertetjük. Tekintsünk három két-állapotú rendszert (A , B és C). Az A rendszer állapotában lévő kvantum információt kívánja eljuttatni a küldő fél (Alice) a tőle távoli fogadó félhez (Bobhoz). Legyen B és C kezdetben a (4.1) szinglett állapotban. Szokás ezt az állapotot *megosztott állapotnak* hívni. A két rendszer legyen térben szeparált: B Alice-nál, C Bobnál. (4.1. ábra)



4.1. ábra: A Bennett-féle teleportációs sémában három kvantumrendszer szerepel: az A rendszer állapota tartalmazza a továbbítani kívánt kvantum információt, a B és C rendszer pedig maximálisan összefonódott állapotban van. Ez utóbbit kísérletileg általában úgy állíthatjuk elő, hogy egy helyen a két rendszert lokális transzformációval összefonjuk, majd eltávolítjuk őket egymástól. Ezt fejezi ki az ábrán, hogy a két rendszer alulról felfelé haladó világvonalai alul összeér. Hasonlóan, Alice egy lokális mérést végez a A és B rendszer együttesén. E két rendszer világvonalai fent, a detektorban ér össze.

A továbbítani kívánt állapot $\alpha|0\rangle_A + \beta|1\rangle_A$ alakú, amely Alice és Bob számára egyaránt ismeretlen. A három rendszer együttes állapota $(\alpha|0\rangle_A + \beta|1\rangle_A)|\Psi_{-}\rangle_{BC}$, amelyet a (4.2) Bell-állapotok szerint kifejtve így is írhatunk:

$$|\Psi_{-}\rangle_{AB}(-\alpha|0\rangle_C - \beta|1\rangle_C) + |\Psi_{+}\rangle_{AB}(-\alpha|0\rangle_C + \beta|1\rangle_C) + |\Phi_{-}\rangle_{AB}(\alpha|1\rangle_C + \beta|0\rangle_C) + |\Phi_{+}\rangle_{AB}(\alpha|1\rangle_C - \beta|0\rangle_C). \quad (4.4)$$

Végezzen Alice egy olyan mérést (Bell-mérést) az A és B rendszeren, amelynek nemdegenerált sajátállapotai éppen a (4.2) Bell-állapotok. Ha a mérés eredménye az, hogy A és B a $|\Psi_{-}\rangle$ állapotban van, akkor a Neumann-elv alapján a mérés úgy változtatja meg az állapotot, hogy a (4.4) kifejtésből csak a $|\Psi_{-}\rangle_{AB}$ -t tartalmazó tag marad meg. Ezáltal C -t ugyanabba az állapottba preparáltuk, mint amiben kezdetben az A rendszer volt.

Ez azonban csak az esetek egynegyedében fordul elő. Ennyi annak a valószínűsége, hogy Alice a $|\Psi_{-}\rangle_{AB}$ állapotot méri. A mérés többi kimenetele szintén egynegyed-egynegyed valószínűséggel fordul elő. Ilyenkor a továbbítani kívánt állapot C állapotából a következő \hat{U} unitér transzformációk valamelyikével visszaállítható:

$$|\Psi_{-}\rangle \text{ esetén:} \quad \hat{U} = \hat{I}, \quad (4.5a)$$

$$|\Psi_{+}\rangle \text{ esetén:} \quad \hat{U} = |1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|, \quad (4.5b)$$

$$|\Phi_{-}\rangle \text{ esetén:} \quad \hat{U} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|, \quad (4.5c)$$

$$|\Phi_{+}\rangle \text{ esetén:} \quad \hat{U} = |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|. \quad (4.5d)$$

Összefoglalva, kezdetben a B és C rendszer összefonódott állapotban volt, és tőlük szeparált állapotban az A rendszer. Az A és B rendszeren elvégzett mérés hatására az A és B rendszer került a kiindulásihoz hasonló összefonódott állapotba, míg a C -vel való összefonódás megszűnt. Az utóbbi állapota (i) megegyezik A kezdeti állapotával, ha a mérés eredményeképp A és B pontosan ugyanabba az összefonódott állapotba került, mint amilyenben a B és C rendszer kezdetben volt, (ii) unitér transzformációval A kezdeti állapotába vihető, ha a mérés egy az eredetihez hasonló maximális összefonódást okozott. Ha tehát Alice a mérés eredményét (azt, hogy a (4.2a–d) Bell-állapotok közül melyikbe került a nála lévő két rendszer) klasszikus kommunikációs csatornán

eljuttatja Bobhoz, akkor Bob az ennek megfelelő (4.5) unitér transzformációval a nála lévő C rendszert a kívánt állapotba hozhatja. Ezt a protokollt *kvantumteleportációnak* nevezik. A fény polarizációs állapotait vagy a neutron spinállapotait alapul véve több kísérletben is sikeresen megvalósították [33,44,45].

Érdeemes megjegyezni, hogy a kvantuminformáció sem terjedhet végtelen sebességgel. Szükség van ugyanis a klasszikus információ továbbítására is, amely csak véges sebességgel lehetséges. Hiszen ha nem ismerjük Alice mérésének eredményét, akkor a közös állapot egy sztatistikusan kevert állapot lesz, amelynek sűrűségoperátora

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\hat{P}_{|\Psi-\rangle_{AB}}(-\alpha|0\rangle_C-\beta|1\rangle_C) + \frac{1}{4}\hat{P}_{|\Psi+\rangle_{AB}}(-\alpha|0\rangle_C+\beta|1\rangle_C) + \\ + \frac{1}{4}\hat{P}_{|\Phi-\rangle_{AB}}(\alpha|1\rangle_C+\beta|0\rangle_C) + \frac{1}{4}\hat{P}_{|\Phi+\rangle_{AB}}(\alpha|1\rangle_C-\beta|0\rangle_C), \end{aligned} \quad (4.6)$$

ahol \hat{P}_ϕ a ϕ állapotra vetítő egydimenziós projektor. Az AB rendszerre vett parciális nyom a C rendszer sűrűségoperátorát adja, ami az identitás egynegyede, azaz teljesen határozatlan az állapot. A kvantuminformáció kinyeréséhez tehát feltétlenül szükséges a klasszikus információ (a mérési eredmény) továbbítása.

4.3. Általánosabb sémák

Az előző szakaszban egy ideális sémát tárgyaltunk: a művelet után a C rendszer állapota (a *kimenet*) pontosan megegyezik az A rendszer kezdeti állapotával (a *bemenettel*). Ha azonban a kiindulásul szolgáló összefonódás vagy a Bell-mérés nem tökéletes, a teleportáció torzít. A pontosságnak egy jó mérőszáma a *megbízhatóság* (*fidelitás*), amely a következőképpen van definiálva:

$$f = |\langle \text{be} | \text{ki} \rangle|^2, \quad (4.7)$$

ahol $|\text{be}\rangle$ a bemeneti állapot, $|\text{ki}\rangle$ a kimeneti. Az ideális esetben ez a mérőszám egy. Kevert állapotokra a megbízhatóság az alábbi módon általánosítható:

$$f = \text{Tr}(\hat{\rho}_{\text{be}}\hat{\rho}_{\text{ki}}), \quad (4.8)$$

ahol $\hat{\rho}_{be}$ és $\hat{\rho}_{ki}$ a be-, ill. kimenet sűrűségoperátora.

Belátható [8], hogy a maximálisan összefonódott állapotok helyett azok keverékével is lehet teleportálni, ám a megbízhatóság ilyenkor egynél kisebb. Hasonlóan csökken a megbízhatóság, ha *részlegesen* (nem maximálisan) összefonódott állapotból indulunk ki [6]. Ha megköveteljük, hogy Alice tetszőleges mérési kimenetele esetén (4.5) mintájára vissza lehessen állítani az eredeti kvantumállapotot — az ilyen sémákat *feltétel nélkülinek* nevezzük —, akkor csak maximálisan összefonódott állapot és Bell-mérés felhasználása esetén lehet a megbízhatóság egy [9]. Ha ezt nem követeljük meg, akkor beszélünk *feltételes* teleportációról. Ilyenkor a mérés néhány adott kimenetelénél a teleportáció egy megbízhatósággal sikeres, a többi esetben azonban meg kell ismételni az eljárást [7]. Emiatt ez a séma *probabilisztikus*, csak bizonyos valószínűséggel sikeres. Ezt a valószínűséget szokás kvantumhatásfoknak hívni.

5. A teleportáció mint állapottranszformáció

Ez a fejezet tárgyalja a dolgozat eredményeinek első felét. A feltételes teleportációs sémákat általánosan vizsgáljuk: az Alice és Bob között megosztott állapot csak részlegesen összefonódott, és Alice nem ideális Bell-mérést végez. Számításainkhoz egy olyan formalizmust vezettünk be [10], amellyel a Hilbert-térbeli bázis rögzítése nélkül írhatjuk le az összefonódott állapotokat és az összetett mérést. Megvizsgáljuk azt az állapottranszformációt, amelyet e torzított séma eredményez. Ez általában egy általánosított (POVM) méréssel írható le, és lehet reverzibilis, lineáris és unitér is.

5.1. Az összefonódottság bázisfüggetlen leírása

Az összefonódott állapotok szeparábilis állapotok szuperpozíciói. A szuperpozícióra való felbontás azonban nem egyértelmű. Tekintsük most az x irányú spinvetület sajátállapotai által alkotott bázist: $|\rightarrow\rangle = (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ és $|\leftarrow\rangle = (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$. A (4.1) szinglett állapotot az új bázisban kifejtve ugyanazokat az együtthatókat kapjuk: $|\Psi_{-}\rangle_{12} = (|\rightarrow\rangle_1 |\leftarrow\rangle_2 - |\leftarrow\rangle_1 |\rightarrow\rangle_2)/\sqrt{2}$. Ez a hasonlóság egyszerűen kifejezhető *konjugált lineáris (antilineáris)* operátorok segítségével. Nemrégiben Arens és Varadarajan [46] ezt a módszert alkalmazta az EPR-paradoxon általánosításához. A most következő két szakaszban az ő formalizmusuk által motiválva írjuk le a teleportációban használt összefonódott állapotokat és az egyszerű (projekció értékű) méréseket.

Tekintsünk két kvantumrendszert (B és C), amik majd a megosztott pár szerepét játsszák. Ezek Hilbert-tere \mathcal{H}_B és \mathcal{H}_C , bennük $\{e_i\}$, ill. $\{f_j\}$ tetszőleges ortonormált bázisok. Egy σ állapotvektor a közös $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$ Hilbert-térben a

$\sum_{i,j} \ell_{ji} e_i \otimes f_j$ alakban fejthető ki. Definiáljuk az $L: \mathcal{H}_B \rightarrow \mathcal{H}_C$ konjugált lineáris operátort úgy, hogy $Le_i = \sum_j \ell_{ji} f_j$ legyen. Ezáltal a σ állapot így írható:

$$\sigma = \sum_i e_i \otimes (Le_i). \quad (5.1)$$

Mivel L konjugált lineáris, (5.1) független az $\{e_i\}$ bázistól. Nézzünk ugyanis egy másik $\{e'_j\}$ bázist. Ebből egy unitér mátrixszal tudjuk kifejezni az eredeti bázis elemeit: $e_i = \sum_j u_{ij} e'_j$. Ezt behelyettesítve kapjuk:

$$\sigma = \sum_{i,j,j'} u_{ij} e'_j \otimes [L(u_{ij'} e'_{j'})] = \sum_{i,j,j'} u_{ij} u_{ij'}^* e_j \otimes (Le_{j'}) = \sum_j e_j \otimes (Le_j). \quad (5.2)$$

A σ állapotot számos módon fel lehet bontani ortogonális szeparábilis állapotok szuperpozíciójára, amelyet matematikailag éppen az fejez ki, hogy az (5.1) állapot független az $\{e_i\}$ bázis választásától. Ezért a kétrészecskes összefonódások *abszolútak*: ha két rendszer valamely bázisban összefonódott, akkor bármely más bázisban is összefonódott.

Jelölje \mathcal{C}_{BC} az olyan $L: \mathcal{H}_B \rightarrow \mathcal{H}_C$ korlátos konjugált lineáris operátorok halmazát, amelyek normája véges:

$$\mathcal{C}_{BC} = \{L: \mathcal{H}_B \rightarrow \mathcal{H}_C \text{ korlátos konj. lin. op.} \mid \text{Tr}(L^\dagger L) < \infty\}. \quad (5.3)$$

L normája a $\text{Tr}(L^\dagger L)$ kifejezés, ahol az adjungáltat az $\langle f | Le \rangle = \langle L^\dagger f | e \rangle^*$ összefüggés definiálja ($e \in \mathcal{H}_B$, $f \in \mathcal{H}_C$). \mathcal{C}_{BC} egy Hilbert-teret alkot az $(L, L') = \text{Tr}(L'^\dagger L)$ skalárszorozattal. (A skalárszorozat az első változójában konjugált lineáris.) Belátható [46], hogy \mathcal{C}_{BC} unitér izomorf a $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$ szorzattérrel az (5.1) összefüggésen keresztül. Ez azt jelenti, hogy mindentiszta kétrészecskes állapothoz kölcsönösen egyértelműen létezik egy egységnyi normájú korlátos konjugált lineáris operátor.

Egy adott σ összefonódott állapot esetén L a két korrelált rendszer összefonódását írja le. L fizikai jelentésének megvilágításához tegyük fel, hogy a B rendszert egy mérés során a ϕ sajátállapotban találtuk. Állításunk, hogy ekkor a C rendszer állapota $L\phi$. Ezt a mérési kimenetelt a $P_{BC} = |\phi\rangle\langle\phi|_B \otimes I_C$

projektor írja le. Alkalmazzuk a Neumann-féle projekciós elvet:

$$\begin{aligned} P_{BC}\sigma &= (|\phi\rangle\langle\phi|_B \otimes I_C) \sum_i e_i \otimes (Le_i) = \phi \otimes \sum_i \langle\phi|e_i\rangle Le_i = \\ &= \phi \otimes \sum_i L(|e_i\rangle\langle e_i|\phi\rangle) = \phi \otimes (L\phi), \end{aligned} \quad (5.4)$$

ahonnan a kívánt eredmény kapjuk. L megmondja tehát, hogy a C rendszer egy állapota melyik B -beli állapottal van összefonódva.

Két részecske *maximálisan összefonódott*, ha külön-külön teljesen határozatlan, kevert állapotban vannak, és csak a kettő együtt van határozott, tiszta állapotban. Az ilyen állapotok sűrűségoperátorának parciális nyoma az identitással arányos. Tegyük fel, hogy a két rendszernek azonos dimenziójú Hilberttere van. Egyszerű látni, hogy az L konjugált lineáris operátorral leírt állapot parciális nyomai

$$\text{Tr}_B(\sigma) = LL^\dagger, \quad \text{ill.} \quad \text{Tr}_C(\sigma) = L^\dagger L. \quad (5.5)$$

Ezért az (5.1) állapot pontosan akkor maximálisan összefonódott, ha $LL^\dagger = (\dim \mathcal{H}_C)^{-1}I_C$ és $L^\dagger L = (\dim \mathcal{H}_B)^{-1}I_B$. Ez ekvivalens azzal, hogy $(\dim \mathcal{H}_C)^{1/2}L$ *antiunitér*.

A továbbiakban összefonódott állapotok mérését tárgyaljuk. Tekintsük az A és B rendszer együttesét. Tegyük fel, hogy elvégzünk egy közös mérést rajtuk, amelynek kimeneteleit a $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ Hilbert-téren értelmezett P_q projektorok (események) írják le. Itt q indexeli a lehetséges kimeneteleket. Véges dimenziós Hilbert-terek esetén $1 < q \leq \dim \mathcal{H}_A \dim \mathcal{H}_B$. A projektorokra fennáll a (2.7) teljességi reláció. Tegyük fel, hogy valamely q esetén a mérési eredmény nem degenerált, azaz $P_q = |\sigma_q\rangle\langle\sigma_q|$ egydimenziós (altérre vetítő) projektor. Ez (5.1) mintájára így írható:

$$\sigma_q = \sum_i (L_q e_i) \otimes e_i, \quad (5.6)$$

ahol $L_q \in \mathcal{C}_{BA}$. Emaitt bármely nem degenerált q mérési kimenetel, ill. P_q esemény (egységnyi komplex fázisfaktor erejéig) kölcsönösen egyértelműen jellemezhető egy egységnyi normáljú \mathcal{C}_{BA} -beli konjugált lineáris operátorral, az (5.6) egyenletben szereplő L_q -val.

A kvantumteleportációban alapvető jelentőségűek a *Bell-mérések*. Az ilyenek projektorfelbontása a Bell-állapotokra vetítő egydimenziós projektorok. Ezeket pontosan azokkal a \mathcal{C}_{BA} -beli ortonormált bázisokkal jellemezhetjük, amelyek tagjai antiunitér operátorok számszorosaival egyeznek meg. A Bell-méréseket komplex fázisfaktorok erejéig egyértelműen meghatározzák az ilyen bázisok.

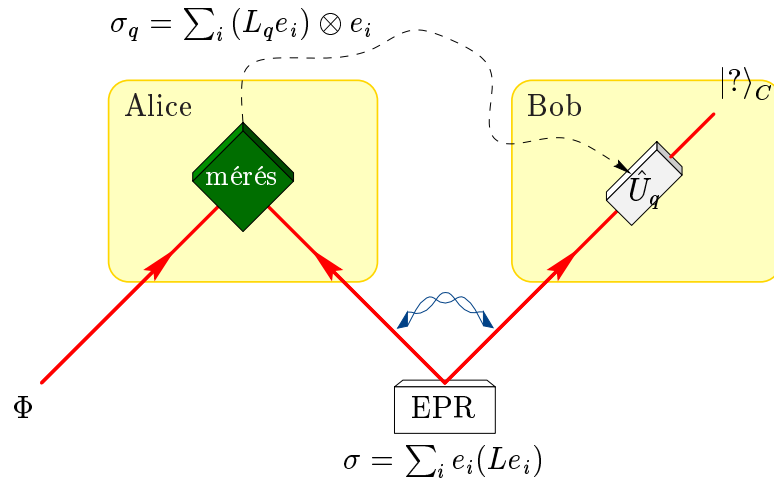
5.2. A teleportációs csatorna

Ebben a szakaszban kiszámoljuk, hogy milyen hatással van a bemenetre, ha a teleportációban Alice és Bob csak részlegesen összefonódott állapottal bír, és Alice nem tud tökéletes Bell-mérést végrehajtani. A számolás során szokás rögzíteni valamely *számítási bázist*, de lehet kvázivalószínűség-eloszlással (pl. Wigner-függvénnyel) is dolgozni [47]. A dolgozatban egy bázisfüggetlen leírást mutatunk be. A jelölések hasonlóak az 5.1. szakaszban bemutatottakhoz, és az 5.1. ábra foglalja őket össze.

Legyen a B és C rendszer kezdeti (részlegesen) összefonódott állapota σ , amelyet az (5.1) egyenlet alapján az $L \in \mathcal{C}_{BC}$ konjugált lineáris operátor ír le. A teleportálni kívánt állapot, a bemenet pedig legyen Φ . Tegyük fel, hogy Alice elvégez egy mérést az A és B rendszer együttesén, amely a q nem degenerált eredményt adja. (5.6) alapján egy σ_q vektor, ill. egy $L_q \in \mathcal{C}_{BA}$ konjugált lineáris operátor jellemzi ezt. A mérés hatására a kezdeti $\Phi \otimes \sigma$ állapot a normálatlan $\sigma_q \otimes (LL_q^\dagger \Phi)$ állapotra változik. A részletes számításokat ezzel kapcsolatban az A.1. függelék tartalmazza. A mérési eredmény függvényében Bob az \hat{U}_q unitér transzformációt alkalmazza. Ezek alapján adódik a C rendszer állapota, a kimenet. A be- és kimenet között a q mérési kimenetel esetén a következő függvény létesít kapcsolatot:

$$f_q: \mathcal{H}_A \mapsto \mathcal{H}_B, \quad f_q(\Phi) = \frac{\hat{U}_q LL_q^\dagger \Phi}{\|LL_q^\dagger \Phi\|}. \quad (5.7)$$

A normálást a nevező biztosítja, ami éppen a q mérési kimenetel valószínűségének négyzetgyöke. Ezt a függvényt hívjuk *teleportációs csatornának*.



5.1. ábra: A vizsgált teleportációs sémában az A rendszer tartalmazza a teleportálandó Φ ismeretlen állapotot, míg a B és C rendszer a σ (nem feltétlenül maximálisan) összefonódott állapotban van. Ezt az utóbbit hívjuk *megosztott állapot*nak. Alice végrehajt egy (nem feltétlenül Bell-típusú) mérést, és a q eredményt kapja. Ez az esemény a σ_q -ra vetítő egydimenziós projektor. A mérési eredményt mint klasszikus információt Alice Bobhoz juttatja, aki ettől függően más-más \hat{U}_q transzformációt hajthat végre a C rendszeren. A kimenet a C rendszer állapota.

A 4.2. szakaszban bemutatott sémában maximálisan összefonódott állapotból indultunk ki, és Bell-mérést végeztünk. Ezek antiunitérrel arányos L , ill. L_q operátorokkal írhatók le. Emiatt az f_q csatorna unitér lesz, és az \hat{U}_q unitér transzformációval visszaállítható, mint ahogyan azt a (4.5a–d) eseteknél láttuk.

Általában azonban (5.7) nem unitér. Ekkor az A rendszer állapotának egy speciális „*teletranszformációját*” valósítjuk meg: az állapotot úgy változtatjuk meg, hogy közben teleportáljuk, így a módosított állapot a C rendszernél jelenik meg.

5.3. A passzív szemlélet

Az eddigi érveléseink azon alapultak, hogy az összefonódott pár egyik felén elvégzett mérés megváltoztatja a másik felének állapotát. Joggal vetődhet fel a kérdés, hogy milyen gyorsan terjed a mérés hatása. A szokásos tárgyalásban pillanatszerűen, végtelen gyorsan. Bár ennek révén információ nem juthat el egyik helyről a másikra a fénynél gyorsabban (ahogyan erre kitértünk a 4.2. szakasz végén), ez a szemlélet mégis ellentmond a fizika relativisztikus elvárásainak, hiszen az egyidejűség nem abszolút, hanem megfigyelőfüggő fogalom. Most újszerűen tárgyaljuk a teleportációt. Nem tesszük fel, hogy a mérés „aktívan” befolyásolhatja egy távoli rendszer állapotát. A mérés konkrét mechanizmusának kihagyásával, csak a korrelációk és valószínűségek figyelembe vételével értelmezzük a teleportációt. Ezt *passzív szemléletnek* hívjuk. Eredményeink megegyeznek a Neumann-elvből származtathatókkal. Érveléseinkben az előző szakaszban bevezetett jelöléseket használjuk.

Számon kell tartanunk, hogy az Alice által végzett mérésnek számos más kimenetele is lehet. Nézzük most példaként azt az esetet, amikor ezek egyike sem degenerált. A mérést ekkor egy \mathcal{C}_{BA} -beli ortonormált bázis, $\{L_q\}$ írja le. Tekintsünk ezekre mint mérési eseményekre: q az az esemény, hogy „Alice mérése a q eredmény adta”. Ennek valószínűsége, ha a bemenet sűrűségoperátora $\hat{\rho}_{be}$:

$$p(q) = \text{Tr} \left[(|\sigma_q\rangle\langle\sigma_q| \otimes \hat{I}_C) (\hat{\rho}_{be} \otimes |\sigma\rangle\langle\sigma|) \right] = \text{Tr}(L_q L_q^\dagger L L_q^\dagger \hat{\rho}_{be}). \quad (5.8)$$

A részletes számolást az A.1. függelék (A.5) egyenlete tartalmazza, amelynek ez a $\hat{Q} = \hat{I}_C$ speciális esete.

A teleportációval továbbított kvantummos információt előbb vagy utóbb ki kell nyerni. Ehhez el kell végezni egy mérést a C rendszeren. Legyen \hat{Q} (projektor \mathcal{H}_C -n) a mért fizikai mennyiség projektorfelbontásának egy eleme. Ennek mint eseménynek a valószínűsége a függelék (A.2) egyenlete alapján:

$$p(\hat{Q}) = \text{Tr} \left[(\hat{I}_{AB} \otimes \hat{Q}) (\hat{\rho}_{be} \otimes |\sigma\rangle\langle\sigma|) \right] = \text{Tr}(\hat{Q} L L^\dagger), \quad (5.9)$$

ami nyilvánvaló, ha figyelembe vesszük, hogy a C rendszer parciális sűrűségoperátora éppen $L L^\dagger$. Ez a bemenettől nem, csak az összefonódott állapottól függ.

Más eredményt kapunk, ha ismert Alice mérésének kimenetele. A \hat{Q} esemény valószínűsége feltéve, hogy Alice mérése a q eredményt adta, a Bayes-féle

feltételes valószínűség alapján adódik:

$$p(\hat{Q}|q) = \frac{p(\hat{Q} \wedge q)}{p(q)}. \quad (5.10)$$

A $\hat{Q} \wedge q$ eredmény egyszerűen felírható. Mivel \hat{Q} a C rendszer Hilbert-terén értelmezett projektor ($\hat{I}_{AB} \otimes \hat{Q}$), a q esemény projektora pedig az AB rendszerén ($|\sigma_q\rangle\langle\sigma_q| \otimes I_C$), a két projektor kommutál egymással. A (2.5) összefüggés alapján az együttes esemény a két projektor szorzata: $|\sigma_q\rangle\langle\sigma_q| \otimes \hat{Q}$. Ezért tehát a két esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége az (A.5) képlet szerint:

$$p(\hat{Q} \wedge q) = \text{Tr} \left[(|\sigma_q\rangle\langle\sigma_q| \otimes \hat{Q})(\hat{\rho}_{\text{be}} \otimes |\sigma\rangle\langle\sigma|) \right] = \text{Tr}(LL_q^\dagger \hat{\rho}_{\text{be}} L_q L^\dagger \hat{Q}). \quad (5.11)$$

Engedjük meg most azt is, hogy Bob a mérés előtt egy \hat{U}_q unitér transzformációval eltranszformálja a C rendszer állapotát. Ez ekvivalens azzal, hogy Bob nem a \hat{Q} eseményt méri, hanem a $\hat{U}_q^\dagger \hat{Q} \hat{U}_q$ eseményt. Az (5.10) feltételes valószínűséget most már ezzel kifejezve:

$$p(Q|q) = \text{Tr} \left[\frac{LL_q^\dagger \hat{\rho}_{\text{be}} L_q L^\dagger \hat{U}_q^\dagger \hat{Q} \hat{U}_q}{\text{Tr}(LL_q^\dagger \hat{\rho}_{\text{be}} L_q L^\dagger)} \right] = \text{Tr}(\hat{\rho}_{\text{ki}} \hat{Q}), \quad (5.12)$$

ahol

$$\hat{\rho}_{\text{ki}} = \frac{\hat{U}_q LL_q^\dagger \hat{\rho}_{\text{be}} L_q L^\dagger \hat{U}_q^\dagger}{\text{Tr}(LL_q^\dagger \hat{\rho}_{\text{be}} L_q L^\dagger)}. \quad (5.13)$$

Ez a \hat{Q} projektoron értelmezett valószínűségi mérték éppen a C rendszer állapota. Mivel azonban feltételes valószínűségről van szó, ezt az állapotot *feltételes állapotnak* hívjuk: a C rendszer állapota a $\hat{\rho}_{\text{ki}}$ *feltételes sűrűségoperátorral* jellemezhető feltéve, hogy az AB rendszeren elvégzett mérés eredménye q .

Az a tény, hogy az Alice, ill. Bob mérésének megfelelő projektorok felcserélhetők, azt fejezi ki, hogy a két mérés egymástól függetlenül külön-külön vagy akár egyszerre elvégezhető. Nem lényeges, hogy melyik mérés történt előbb. Akár Bob is mérhet elsőként, a teleportáció akkor is sikeres. Ennek érzékeltetésére példaként tegyük fel, hogy a teleportációt n -szer végrehajtjuk ugyanabból a bemeneti állapotból kiindulva. Ehhez n darab összefonódott párra van szükség: $B_1, C_1; B_2, C_2; \dots; B_n, C_n$. Bob a nála lévő $(C_1, \dots,$

C_n) sokaság minden elemén elvégez egy-egy mérést. Ez természetesen olyan eredményeket ad, mint amilyeneket egy LL^\dagger sűrűségoperátorú sokaság adna, hiszen a C_i rendszer teljesen független az A_i rendszertől. Ha azonban Bob ismeri Alice mérési eredményeit, akkor azok alapján *szétválogathatja* a sajátjait. Közös mérési eredményeik éppen úgy korrelálnak, mintha a C_i rendszer az (5.13) alakú állapotban lenne.

A kvantumos információ ilyen módon való továbbítása tehát két részre osztható: az összefonódott pár kvantumos korrelációira és az utólagos válogatáshoz szükséges klasszikus kommunikációra.

5.4. POVM transzformációk

Az 5.1. ábrán vázolt elrendezésben általában nemcsak teleportáció történik. Ebben a szakaszban inkább az állapottranszformációs jellegét vizsgáljuk: valamely $\hat{\rho}_{be}$ állapotból egy $\hat{\rho}_{ki}$ állapot lesz az (5.13) képletnek megfelelően. A művelet tartalmaz egy mérést is, amelynek q kimenetelétől függ a transzformáció. A q kimenetel (5.8) valószínűségéből és (2.10) összevetéséből látszik, hogy az egész transzformációt úgy is értelmezhetjük, mintha a $\hat{\rho}_{be}$ bemeneten végeznénk egy általánosított (*POVM*) mérést. Az egyes q kimenetekhez tartozó pozitív operátorok rendszere $\{L_q L^\dagger L L_q^\dagger\}$, az állapotváltozást leíró ún. Kraus-operátorok pedig az

$$\hat{X}_q = \hat{U}_q L L_q^\dagger: \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_C \quad (5.14)$$

lineáris operátorok. Az $L_q L^\dagger L L_q^\dagger = \hat{X}_q^\dagger \hat{X}_q$ pozitív operátorok kielégítik a (2.9) teljességi relációt. A „*teletranszformáció*” egyik tanulsága az, hogy egy mérés pozitív operátorait úgy is fel lehet bontani $\hat{X}_q^\dagger \hat{X}_q$ szorzatalakra (ez az ún. *Kraus-reprezentáció* vagy Kraus-felbontás), hogy az \hat{X}_q lineáris operátorok értelmezési tartománya és érkezési halmaza két különböző rendszer Hilbert-tere legyen. Az ilyen állapottranszformációk során teleportáció is történik.

Érdeemes megjegyezni, hogy az n állapotú rendszereket teleportáló ideális sémában (4.2. szakasz) az \hat{X}_q operátorok unitér operátorok $1/n$ -szeresei, a megfelelő pozitív operátorok mind az identitás számszorosai: $\hat{X}_q^\dagger \hat{X}_q = \hat{I}_A/n^2$.

5.5. Linearitás és reverzibilitás

Az állapottranszformáció szempontjából nem, de a teleportáció szempontjából lényeges kérdés, hogy a kimenetből vissza lehet-e állítani a bemenet. Az (5.7) csatornát *reverzibilisnek* hívjuk, ha különböző bemenetek esetén különböző a kimenet. Ekkor (elvben) minden állapot visszaállítható a kimeneti állapotból. Egyszerű ellenőrizni, hogy a reverzibilitás ekvivalens azzal a feltétellel, hogy az (5.14) lineáris operátor injektív. A továbbiakban ezt az esetet vizsgáljuk.

Ha f_q *nem lineáris*, akkor az eredeti állapot csak trükkös nemlineáris transzformációval állítható helyre. Mivel az ilyenek probablisztikusak [48], a kísérleti megvalósíthatóság miatt az is elvárás lehet, hogy a transzformáció lineáris, ill. unitér legyen. Állításunk, hogy reverzibilis csatorna esetén a következő három tulajdonság ekvivalens:

- (i) f_q lineáris,
- (ii) a $p(q)$ valószínűség független a bemenettől,
- (iii) f_q unitéren visszaállítható.

Az unitér visszaállíthatóság a következőket jelenti. Ha adva van egy $i_{AC}: \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_C$ skalárszorzzattartó (injektív) beágyazás, akkor az A rendszer állapotait azonosíthatjuk a C rendszer egyes állapotaival. Ha létezik egy a C rendszeren ható \hat{U} unitér transzformáció, amellyel a kimenet a bemenet i_{AC} általi képébe vihető tetszőleges bemenet esetén (azaz $\hat{U}f_q = i_{AC}$), akkor a csatorna az \hat{U} transzformációval *unitéren visszaállítható*. Az unitér transzformációk használata azért előnyös, mert kivitelezhetők kvantumoptikában [49,50].

A bizonyítást az A.2. függelék tartalmazza.

A (ii) tulajdonság azt jelenti, hogy Alice a mérés következtében semmilyen információhoz nem juthat a bemenet állapotáról. Ha ez teljesül, akkor (iii) is, azaz unitér transzformációval vissza lehet állítani az eredeti állapotot. Emlékezzünk, hogy a 4.2. szakaszban minden Bell-állapot egyformán valószínű volt, és ezért Alice nem tudott meg semmit a bemenetről.

6. A teletranszformációs sémák osztályozása

A tökéletlen teleportáció eredményezte transzformáció lehet reverzibilis vagy irreverzibilis, illetve lineáris vagy nemlineáris. E szempontok alapján osztályozva először a lineáris reverzibilis sémákat elemezzük. Megadjuk azt a feltételt, amit az Alice és Bob között megosztott állapotnak és az Alice által elvégzett mérésnek teljesítenie kell. Megvizsgáljuk, mikor lehet feltétel nélküli sémát konstruálni. Végül példát mutatunk a nemlineáris reverzibilis esetre, amelynél Alice is információhoz jut a bemenő állapotról.

6.1. Unitér reverzibilitás és mérésillesztés

Most a reverzibilis esetet vizsgáljuk, amikor a teleportációs csatorna még lineáris is. Ekkor a csatorna unitér transzformációval visszaállítható. Most ennek szükséges és elégséges feltételét határozzuk meg abban az általánosságot meg nem szorító esetben, amikor $\dim \mathcal{H}_A \leq \dim \mathcal{H}_B = \dim \mathcal{H}_C$, és végesek.

Tegyük fel, hogy a megosztott állapotot egy invertálható L konjugált lineáris operátor írja le (5.1) alapján. Ez fizikailag azt jelenti, hogy az állapot Schmidt-felbontásában csak nemzérus együtthatók vannak, a Hilbert-tér minden eleme be van vonva az összefonódásba. Ha ez nem teljesülne, akkor \mathcal{H}_C helyett L értékkészletét, \mathcal{H}_B helyett L magjának ortogonális kiegészítőjét tekinthetnénk. A csatornát visszaállító unitér transzformációt beleolvasztva a Bob által végrehajtott \hat{U}_q transzformációba az unitér reverzibilitás ezt jelenti:

$$f_q = i_{AC}, \quad \text{ill.} \quad \frac{\hat{U}_q L L_q^\dagger \Phi}{\|L L_q^\dagger \Phi\|} = i_{AC} \Phi. \quad (6.1)$$

Mivel a (6.1) feltétel implikálja, hogy a valószínűség Φ -tól független legyen, a nevezőbe a $\|LL_q^\dagger\|$ operátornormát is írhatjuk. A mérési eredményt leíró konjugált lineáris operátort kifejezve a következőket kapjuk:

$$L_q = \|LL_q^\dagger\| i_{AC}^\dagger U_q L^{-1\dagger} \quad (6.2)$$

Egy ilyen kimenetelű mérés alkalmas 1 megbízhatóságú feltételes teleportációra. Bár a kifejezés látszólag függ az $\|LL_q^\dagger\|$ valószínűségtől, ez feloldható az L_q normáltságára vonatkozó $\text{Tr}_B(L_q^\dagger L_q) = 1$ feltételből:

$$p_q = \left[\text{Tr}_B \left(L^{-1} \Pi_q L^{-1\dagger} \right) \right]^{-1}, \quad (6.3)$$

ahol a $\Pi_q = U_q^\dagger i_{AC} i_{AC}^\dagger U_q$ projektor az $U_q^\dagger[\text{Ran } i_{AC}]$ altérre vetít. Π_q csak akkor egyezik meg \mathcal{H}_C identitás operátorával, ha \mathcal{H}_A és \mathcal{H}_C azonos dimenziós. Ekkor (6.3) a következő alakot ölti:

$$p_q = \left[\text{Tr}_B \left((L^\dagger L)^{-1} \right) \right]^{-1}. \quad (6.4)$$

Egy adott L invertálható konjugált lineáris operátorral jellemzett összefonódott állapot mellett nem lehet minden mérés esetén unitéren visszaállítani a bemenetet, hanem csak az alábbiaknál:

$$\mathcal{M}_L = \left\{ L_q = \frac{i_{AC}^\dagger U L^{-1\dagger}}{\sqrt{\text{Tr}_B(L^{-1} \Pi L^{-1\dagger})}} \mid U: \mathcal{H}_C \rightarrow \mathcal{H}_C \text{ unitér operátor} \right\}. \quad (6.5)$$

Tehát nem minden mérési kimenetel eredményez 1 megbízhatóságú feltételes teleportációt, csak azok, amiket \mathcal{M}_L ír le. Az Alice és Bob között megosztott összefonódott állapotot és az Alice által elvégzett mérést „illeszteni” kell egymáshoz. Ez a megállapítás egy jelentős általánosítása [51] eredményének.

Érdemes megjegyezni, hogy a (6.3) valószínűség csak az alkalmazott összefonódott állapottól függ, és a $\dim \mathcal{H}_A = \dim \mathcal{H}_C$ esetben minden illeszkedő mérési kimenetel esetén azonos. Ebből látható, hogy egy olyan összefonódott állapot, amelyikre a (6.4) kifejezés $(\dim \mathcal{H}_A)(\dim \mathcal{H}_B)$ -nél kisebb, alkalmatlan feltétel nélküli teleportációra.

Egy másik érdekes eredmény, hogy az illeszkedő kimenetek \mathcal{M}_L halmazát lokális unitér transzformációk feszítik ki: ha egy adott mérési kimenetel alkalmas feltételes teleportációra, akkor minden illeszkedő kimenetel ebből megkapható egy az A rendszeren végrehajtott unitér transzformációval.

Nézzünk egy példát a mérésillesztésre. Legyen mindhárom rendszer n állapotú, és a B és C rendszer legyen egy részlegesen összefonódott állapotban. Ezt egy alkalmas $\{|i\rangle\}$ bázisban a következő mátrixszal írhatjuk le:

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \sigma = \sum_i \alpha_i |i\rangle_B |i\rangle_C, \quad (6.6)$$

ahol egyik α_i sem nulla. Az \hat{U}_q transzformációt identitásnak választva (6.2) alapján egy lehetséges mérési kimenetelt kapunk:

$$L_1 = \left(\sum_i \frac{1}{|\alpha_i|^2} \right)^{-1/2} \begin{pmatrix} 1/\alpha_1^* & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\alpha_n^* \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1 = \left(\sum_i \frac{1}{|\alpha_i|^2} \right)^{-1/2} \sum_i \frac{1}{\alpha_i^*} |i\rangle_A |i\rangle_B. \quad (6.7)$$

Egy feltételes teleportációs sémát kapunk, ha a BC rendszer állapota (6.6), és Alice egy olyan mennyiséget mér, amelynek (6.7) sajátállapota.

6.2. Feltétel nélküli teleportáció

Ha Alice mérésének van olyan kimenetele, amelyik illeszkedik a BC rendszer kezdeti összefonódott állapotához, akkor egy *feltételes teleportációs* sémát kapunk. Abban a speciális esetben, amikor mindegyik kimenetel illeszkedik az összefonódott állapothoz, akkor a mérés tetszőleges kimenetele esetén unitér transzformációval visszaállíthatja Bob a bemenetet. Ez utóbbi éppen a *feltétel nélküli teleportáció*. Most azt vizsgáljuk, ilyen feltételeket kell kirónunk az összefonódott állapotokra, hogy az illeszkedő mérési kimenetelekből egy mérhető fizikai mennyiséget megkonstruálhassunk.

Keressük tehát a mérési kimenetek egy olyan ortonormált bázisát, amelynek minden eleme a (6.5) halmazból való. Könnyű látni, hogy ha L maximálisan összefonódott állapotot ír le (azaz antiunitérrel arányos), akkor a (6.3)

valószínűség éppen $p_q = 1/(\dim \mathcal{H}_A \dim \mathcal{H}_B)$, és az illeszkedő kimenetek:

$$M_L = \left\{ L_q = \frac{i_{AC}^\dagger A}{\sqrt{\dim \mathcal{H}_A}} \mid A: \mathcal{H}_B \rightarrow \mathcal{H}_C \text{ antiunitér} \right\}. \quad (6.8)$$

$i_{AC}^\dagger A$ -t leszűkítve a magja ortogonális komplementerére szintén antiunitért kapunk. Ezért (6.8) pontosan az AB rendszer maximálisan összefonódott állapotait írja le. (4.3) mintájára választható egy (6.8)-beli bázis \mathcal{C}_{BA} -ban, amellyel feltétel nélküli teleportációt valósíthatunk meg, akár a $\dim \mathcal{H}_A < \dim \mathcal{H}_C$ esetben is. Maximálisan összefonódott állapotból kiindulva valóban lehet feltétel nélküli teleportációt megvalósítani. Ehhez Alice mérésének a (4.3) típusú Bell-állapotokra kell vetítenie [2]. Eredményünk szerint ez akkor is fennáll, ha az A és C rendszer Hilbert-tere különböző dimenziójú. Az ilyen sémát, ahol egy kisebb állapottérből egy bővebbe teleportálunk, *aszimmetrikus teleportációnak* nevezhetjük.

Erre mutatunk egy egyszerű példát. Legyen az A kétállapotú rendszer, a B és C pedig háromállapotú, és legyen a BC rendszer a következő maximálisan összefonódott állapotban:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} (|00\rangle_{BC} + |11\rangle_{BC} + |22\rangle_{BC}). \quad (6.9)$$

A teleportáció 1 megbízhatóságú és feltétel nélküli, ha Alice mérésének sajátállapotai az alábbiak:

$$\sigma_{1,2} = (|00\rangle_{AB} \pm |11\rangle_{AB}) / \sqrt{2}, \quad (6.10\text{a,b})$$

$$\sigma_{3,4} = (|01\rangle_{AB} \pm |12\rangle_{AB}) / \sqrt{2}, \quad (6.10\text{c,d})$$

$$\sigma_{5,6} = (|02\rangle_{AB} \pm |10\rangle_{AB}) / \sqrt{2}. \quad (6.10\text{e,f})$$

6.3. Egy nemlineáris példa

Most a nemlineáris reverzibilis csatornára láthatunk példát. Megmutatjuk, hogy ha a q kimenetek valószínűsége függ a bemenettől, akkor a teleportáció többszöri elvégzésekor kapott statisztikából akár meghatározható a bemenet. Tekintsünk kétállapotú rendszereket, és a megosztott pár legyen maximálisan

összefonódott:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_B |0\rangle_C + |1\rangle_B |1\rangle_C), \quad (6.11)$$

Egy reverzibilis, de nem lineáris csatornát kapunk, ha Alice mérési eredményeit a következő ortonormált bázis írja le:

$$L_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \frac{1}{2} |0,0\rangle_{AB} + \frac{\sqrt{2}}{2} |0,1\rangle_{AB} + \frac{1}{2} |1,1\rangle_{AB}, \quad (6.12a)$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{2} |0,0\rangle_{AB} - \frac{\sqrt{2}}{2} |0,1\rangle_{AB} + \frac{1}{2} |1,1\rangle_{AB}, \quad (6.12b)$$

$$L_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \frac{1}{2} |0,0\rangle_{AB} + \frac{\sqrt{2}}{2} |1,0\rangle_{AB} - \frac{1}{2} |1,1\rangle_{AB}, \quad (6.12c)$$

$$L_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \frac{1}{2} |0,0\rangle_{AB} - \frac{\sqrt{2}}{2} |1,0\rangle_{AB} - \frac{1}{2} |1,1\rangle_{AB}. \quad (6.12d)$$

Végezzük el a telportációt ugyanabból a $\Phi = \alpha |0\rangle_A + \beta |1\rangle_A$ tiszta állapotból kiindulva sokszor, és a mérési eredményekből készítsünk statisztikát. Így kimérhetjük Alice mérési kimeneteleinek valószínűségét:

$$p_q(\Phi) = \|LL_q^\dagger\Phi\|^2. \quad (6.13)$$

Ezekből az alábbi kombinációk képezhetők

$$p_1 - p_2 = p_3 - p_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{Re}(\alpha^* \beta), \quad (6.14a)$$

$$(p_1 + p_2) - (p_3 + p_4) = |\alpha|^2 - \frac{1}{2}. \quad (6.14b)$$

A statisztikából meghatározva a p_q valószínűségeket (6.14) alapján az α és β együtthatók kiszámíthatók. Bár a transzformáció nem lineáris, a kimenet is kódolja α és β értékeit:

$$f_1(\Phi) \propto \alpha |0\rangle_C + (\alpha\sqrt{2} + \beta) |1\rangle_C, \quad (6.15a)$$

$$f_2(\Phi) \propto \alpha |0\rangle_C + (-\alpha\sqrt{2} + \beta) |1\rangle_C, \quad (6.15b)$$

$$f_3(\Phi) \propto (\alpha\sqrt{2} + \beta) |0\rangle_C - \beta |1\rangle_C, \quad (6.15c)$$

$$f_4(\Phi) \propto (\alpha\sqrt{2} - \beta) |0\rangle_C - \beta |1\rangle_C. \quad (6.15d)$$

Bob a mérési eredményeiből és az Alice-tól kapott eredményekből a (6.15) transzformációs szabály ismeretében szintén kiszámolhatja α és β értékeit.

Ha tehát sokszor ugyanazt az állapotot teleportáljuk, az állapot mindkét helyen megmérhető. Ilyen módon kapcsolatot találunk a kvantumtitkosítással [52], ill. a sűrű kódolással [5], amely témakörök további érdekes problémákat vetnek fel a kvantuminformáció-elméletben.

7. Állapotlevágás

A kvantuminformáció-elméletben gyakran szorítkozunk véges sok állapotú rendszerekre. A kvantumoptikai kísérletekben azonban az optikai módusok végtelen sok állapotúak. Felmerül a kérdés, vajon a véges dimenzióban kiszámolt eredmények helytállóak-e. Látni fogjuk, hogy a diszkrét teleportáció úgy értelmezhető a végtelen dimenziós állapottérben, hogy közben egy előre kiszemelt altérre vetítjük a bemenet állapotát. Ezt a transzformációt hívjuk *állapotlevágásnak* [53,11].

Az általános elmélet ismertetése után egy kísérletileg is realizálható példát mutatunk: ez egy olyan projekciót valósít meg, hogy a bemenet Fock-kifejtéséből csak az első néhány fotonszámú állapotot tartja meg. Az eszközt kvantumollónak nevezzük. Megvizsgáljuk a kísérleti kivitelezhetőségét és az állapottervezésben betöltött szerepét is.

7.1. Az állapotlevágás általános elmélete

Tegyük fel, hogy \mathcal{A} egy véges dimenziós altér \mathcal{H}_A -ban, és a \mathcal{H}_A , \mathcal{H}_B , \mathcal{H}_C Hilbert-terek magasabb, akár végtelen dimenziójúak. A teleportációs csatorna ekkor is az (5.7) alakot ölti. Most az \mathcal{A} altéren való unitér reverzibilitást vizsgáljuk. Az 5.5. szakasz után egyszerűen belátható, hogy az \mathcal{A} altéren a bemenet pontosan akkor állítható vissza unitéren, ha

$$p_q(\Phi) = \begin{cases} \|LL_q^\dagger\|^2, & \text{ha } \Phi \in \mathcal{A}; \\ 0, & \text{ha } \Phi \in \mathcal{A}^\perp. \end{cases} \quad (7.1)$$

Ha \hat{U}_q a visszaállító transzformáció, amit Bob hajt végre, akkor a feltétellel egyenértékű, hogy

$$f_q = i_{AC} \text{Pr}_{\mathcal{A}}, \quad (7.2)$$

ahol $\text{Pr}_{\mathcal{A}}$ az \mathcal{A} altérre vetítő projektor. Általában a visszaállító transzformáció nem egyértelmű, mert nem érdekes, hogyan van értelmezve az $i_{AC}[\mathcal{A}]$ altér ortogonális kiegészítőjén.

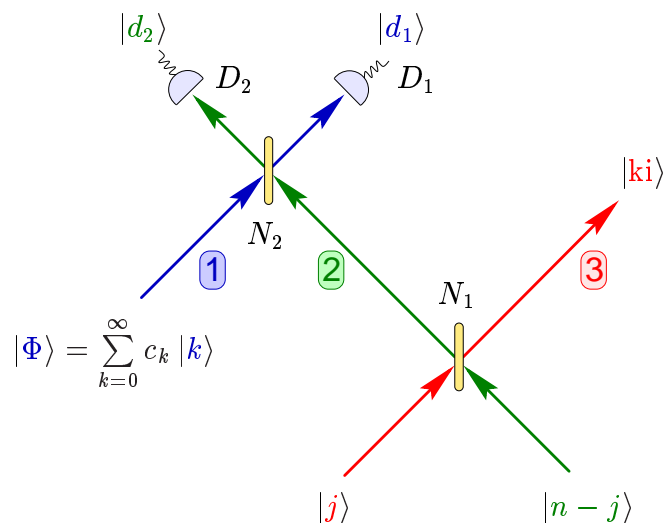
Értelmezzük, mi történik ekkor. Ha a bemenet állapota az \mathcal{A} altérben fekszik, akkor ezt sikeresen teleportáljuk. Ha nem, akkor csak az \mathcal{A} altérbe eső vetületét teleportáljuk. Ennek $\|LL_q^\dagger\Phi\|^2$ valószínűsége függ a bemenettől, és akkor maximális, ha a bemenet az \mathcal{A} altérben van. Ha viszont \mathcal{A} ortogonális kiegészítőjében van, akkor a vizsgált mérési kimenetelnek nulla a valószínűsége: a teleportáció sohasem sikeres, az állapotlevágásnak ekkor nincs értelme. Ez esetben Alice valami más eredményt fog mérni.

7.2. Optikai állapotok levágása

Ebben a szakaszban az állapotlevágás egy speciális családját mutatjuk be: egy optikai állapoton olyan projekciót valósítunk meg, amely a bemenet Fock-kifejtéséből csak az első n komponenset tartja meg. Az eszközt, amely a levágást kísérletileg megvalósíthatja, *kvantumollónak* nevezzük.

A javasolt összeállítás a 7.1. ábrán látható. A három optikai módus reprezentálja a teleportációban szerepet játszó három kvantumrendszert: az A , B és C rendszernek rendre az 1., 2. és 3. módus felel meg. Az 1. módus tartalmazza a $|\Phi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} c_k |k\rangle$ alakú teleportálandó állapotot. A 2. és 3. módus legyen kezdetben egy-egy fotonszám-sajátállapotban. Belőlük az N_1 nyalábosztó állítja elő a teleportációhoz szükséges összefonódott állapotot. Hasonlóképpen történik az összetett mérés is: az N_2 nyalábosztó összefonja az 1. és 2. módust, majd a D_1 és D_2 ideálisnak feltételezett fotonfelbontású számláló detektorokkal mérünk.

A két általános nyalábosztó (3.13) alapján összesen hat paraméterrel adható meg: τ_1, ϕ_t, ϕ_r jellemzi N_1 -et, τ_2, η_t, η_r pedig N_2 -t. Célunk úgy megválasztani a nyalábosztók paramétereit, az N_1 nyalábosztó bemenetének állapotát és a detektorok által mért eseményt, hogy a bemeneti állapot Fock-bázis szerinti kifejtésében csak (i) a vákuum és az egyfotonos komponens ($|0\rangle, |1\rangle$), (ii) az első három komponens ($|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$), (iii) az első n komponens ($|0\rangle, |1\rangle, \dots, |n\rangle$), (iv) a vákuum és a kétfotonos komponens ($|0\rangle, |2\rangle$) maradjon meg.



7.1. ábra: A kvantumolló. A 2. és 3. módus kezdetben fotonszám-sajátállapotban van. N_1 és N_2 általános nyalábosztó, D_1 és D_2 ideális fotonszámláló detektor, amely a $|d_1\rangle$, ill. a $|d_2\rangle$ Fock-állapotot méri.

7.2.1. Az első n komponens levágása

Célunk most az, hogy a kvantumolló a $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |n\rangle$ állapotokat vágja le. Tegyük fel, hogy az N_1 nyalábosztó a következő alakú összefonódott állapotot hozza létre:

$$|\Psi\rangle_{23} = \sum_{j=0}^n \beta_j |n-j, j\rangle. \quad (7.3)$$

Ez felel meg az (5.1) megosztott állapotnak. Hogy ezt miként lehet előállítani, azzal a 7.2.2. és a 7.2.3. szakaszban foglalkozunk. Most arra adunk választ, milyennek kell lennie ennek az állapotnak és az N_2 nyalábosztónak a kívánt állapotlevágás eléréséhez.

Az N_2 nyalábosztó a (7.3) állapotot összekeveri a bemeneti $|\Phi\rangle = \sum_{k=0}^n c_k |k\rangle$ állapottal. Vizsgáljuk meg azt az eseményt, amikor a D_1 és D_2 detektor d_1 , ill. d_2 fotont számlál. A B. függelékben részletezett számolás szerint a kimenet lineárisan függ a bemenettől, így a 3. módus a következő

normálatlan állapotba kerül:

$$|ki\rangle = \sum_{j=0}^n \sum_k \beta_j D_{jk} c_k |j\rangle. \quad (7.4)$$

Azt szeretnénk, ha ez arányos lenne a levágott $\sum_{k=0}^n c_k |k\rangle$ állapottal tetszőleges c_k együtthatók esetén. Ennek az a feltétele, hogy D_{jk} diagonális legyen, és (K arányossági konstans)

$$D_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{ha } j \neq k, \\ K/\beta_j, & \text{ha } j = k. \end{cases} \quad (7.5)$$

A sikeres állapotlevágáshoz szükséges (7.3) köztes állapot β_j együtthatói így

$$\beta_j = \frac{K}{D_{jj}}. \quad (7.6)$$

A K normálási faktort a (7.3) kifejezés normálásából kapjuk:

$$K = \left(\sum_{j=0}^n \frac{1}{|D_{jj}|^2} \right)^{-1/2}. \quad (7.7)$$

A kvantumolló *hatásfoka*, annak a valószínűsége, hogy valóban a tárgyalt mérési esemény következik be, a (7.4) állapot normájából kapható: $K^2 \sum_{k=0}^n |c_k|^2$. Ha a bemeneti $|\Phi\rangle$ állapot legfeljebb n fotont tartalmaz, akkor a hatásfok maximális (K^2), és a bemeneti állapot teleportálódik. Általános esetben *állapotlevágás és teleportáció* történik, melynek hatásfoka kisebb.

A D_{jk} mátrix csak az N_2 nyálábosztó paramétereitől és a detektorok által mért fotonszámoktól függ. A következőkben azt vizsgáljuk, hogy mikor teljesül a (7.5) ollózási feltétel, és milyen (7.3) köztes állapot szükséges. A B. függelék (B.7) képletéből látható, hogy $k + n - j \neq d_1 + d_2$ esetén a D_{jk} mátrixelem eltűnik. A továbbiakban azt az esetet vizsgáljuk, amikor a detektorok által mért összefotonszám megegyezik az N_1 nyálábosztóra eső összefotonszámmal, n -nel. Ezt az energiamegmaradással szembeni elvárásaink indokolják. Ekkor D_{jk} főátlón kívüli elemei automatikusan kiesnek. Tekintsünk most néhány speciális módszert az állapotlevágásra.

1. módszer. Könnyen belátható, hogy az ollózás (7.5) feltétele teljesül, ha a D_1 detektor vákuumot, a D_2 pedig n fotont jelez. (B.9) alapján ugyanis

$$D_{jj} = C_{j,j,0,0} = \sqrt{\binom{n}{j}} R_{21}^j R_{22}^{n-j}, \quad (7.8)$$

ami nem nulla. (R_{ij} az N_2 nyalábosztót leíró mátrix.) A keresett összefonódott állapot együtthatói pedig:

$$\beta_j = \frac{K}{\sqrt{\binom{n}{j}} R_{21}^j R_{22}^{n-j}} = \frac{K e^{-i\{j\eta_r + (n-j)\eta_t\}}}{\sqrt{\binom{n}{j}} (-\sin \tau_2)^j (\cos \tau_2)^{n-j}}. \quad (7.9)$$

Az eszköz hatásfokát jellemző K^2 faktor független a fázistolásoktól, és szimmetrikus nyalábosztó ($\tau_2 = \pi/4$) esetén veszi fel maximumát. Értékét n függvényében a 7.1. táblázat mutatja. Jól látható, hogy K^2 az n -nel rohamosan csökken.

2. módszer. Hasonlóan belátható, hogy az ollózás (7.5) feltétele akkor is kielégíthető, ha a D_1 detektor 1 fotont számlál, a D_2 pedig $(n-1)$ -et. Ekkor azonban azt kapjuk, hogy

$$D_{00} = C_{0,0,0,1} = \sqrt{n} R_{12} R_{22}^{n-1} = \sqrt{n} \sin \tau_2 (\cos \tau_2)^{n-1} e^{i\{\eta_r - (n-1)\eta_t\}}, \quad (7.10a)$$

$$\begin{aligned} D_{jj} &= C_{j,j,0,1} + C_{j,j,1,0} = \sqrt{\frac{(n-1)!}{j!(n-j)!}} R_{21}^{j-1} R_{22}^{n-j-1} [(n-j)R_{12}R_{21} + jR_{11}R_{22}] = \\ &= \sqrt{\frac{(n-1)!}{j!(n-j)!}} (-e^{-i\eta_r} \sin \tau_2)^{j-1} (e^{-i\eta_t} \cos \tau_2)^{n-j-1} (j - n \sin^2 \tau_2), \end{aligned} \quad (7.10b)$$

$$D_{nn} = C_{n,n,1,0} = \sqrt{n} R_{11} R_{21}^{n-1} = \sqrt{n} \cos \tau_2 (-\sin \tau_2)^{n-1} e^{i\{\eta_t - (n-1)\eta_r\}}. \quad (7.10c)$$

Az összefonódott állapot együtthatói (7.6)-ból kaphatók. (7.7) alapján könnyen felírhatjuk az állapotlevágás hatásfokát is. A maximális hatásfokot megadó K^2 faktor ismét független a fázistolásoktól. A K^2 valószínűség τ_2 -ben ismét szimmetrikus $\pi/4$ -re, és páros n esetén két maximuma van. A maximumok helyét, a maximális hatásfokot és az optimális transzmittivitást a 7.1. táblázat mutatja.

7.1. táblázat: A $|0\rangle, |1\rangle, \dots |n\rangle$ komponenseket levágó kvantumolló K^2 maximális hatásfoka és az optimális $\cos^2 \tau_2$ transzmittancia, ha a D_1 és D_2 detektor (i) $d_1 = 0$ és $d_3 = n$, ill. (ii) $d_1 = 1$ és $d_2 = n - 1$ fotont számlál.

n	$d_1 = 0, d_2 = n$		$d_1 = 1, d_2 = n - 1$	
	$\cos^2 \tau_2$	K^2	$\cos^2 \tau_2$	K^2
1	0,5	0,25	0,5	0,25
2	0,5	0,10	0,21 vagy 0,79	0,11
3	0,5	0,047	0,5	0,047
4	0,5	0,023	0,38 vagy 0,62	0,028
5	0,5	0,012	0,5	0,019
6	0,5	0,0062	0,42 vagy 0,58	0,012
7	0,5	0,0032	0,5	0,0093
8	0,5	0,0016	0,44 vagy 0,56	0,0056

7.2.2. A $|0\rangle$ és $|1\rangle$ komponensek levágása általános nyalábosztóval

Az előbbieken megadtuk, hogy melyik az az összefonódott állapot, amellyel az állapotlevágás megvalósítható. Most azt fogjuk vizsgálni, hogyan állítható elő ez az állapot $n = 1$ esetén. Behelyettesítve a 7.2.1. szakasz képleteibe kapjuk, hogy a hatásfok négyzetgyökét adó faktor $K = \sin \tau_2 \cos \tau_2$, és az előállítandó (7.3) állapot az N_2 nyalábosztó paramétereivel kifejezve az 1., ill. a 2. módszer esetén:

$$\left| \Psi_{23}^{(1)} \right\rangle = e^{i\eta t} \sin \tau_2 |1, 0\rangle - e^{i\eta r} \cos \tau_2 |0, 1\rangle, \quad (7.11a)$$

$$\left| \Psi_{23}^{(2)} \right\rangle = e^{-i\eta r} \cos \tau_2 |1, 0\rangle - e^{-i\eta t} \sin \tau_2 |0, 1\rangle. \quad (7.11b)$$

Ezeket az állapotokat szeretnénk előállítani az N_1 nyalábosztóval az $|1, 0\rangle$ vagy a $|0, 1\rangle$ állapotból. Az N_1 nyalábosztóval előállítható állapotok:

$$|1, 0\rangle \longmapsto e^{i\phi t} \cos \tau_1 |1, 0\rangle - e^{-i\phi r} \sin \tau_1 |0, 1\rangle, \quad (7.12a)$$

$$|0, 1\rangle \longmapsto e^{i\phi r} \sin \tau_1 |1, 0\rangle + e^{-i\phi t} \cos \tau_1 |0, 1\rangle. \quad (7.12b)$$

Az egyszerűség kedvéért a fázistolásokat válasszuk nullának. Nézzük most az 1. módszert, tekintsük a (7.11a) és a (7.12a) egyenleteket. Az ollózás feltétele ekkor az, hogy a két nyalábosztó *komplementer* legyen: N_1 transzmittivitása és N_2 reflektanciája egyezzen meg. Hasonló szimmetriát tapasztalhatunk, ha a $|0, 1\rangle$ állapotból indulunk ki, és továbbra is az 1. módszer szerinti eseményeket detektáljuk. Ekkor a két nyalábosztónak *azonosnak* kell lennie.

A Pegg–Phillips–Barnett-féle kvantumolló [53,54] a fentieknek egy speciális esete, amikor a hatások éppen maximális, és ekkor $|\Psi_{23}\rangle$ is maximálisan összefonódott állapot.

7.2.3. A $|0\rangle$, $|1\rangle$ és $|2\rangle$ komponens levágása

A következőkben megadjuk a $|0\rangle$, $|1\rangle$ és $|2\rangle$ komponens levágó kvantumolló paramétereit. Ehhez a 7.2.1. szakasz eredményeit használjuk fel az $n = 2$ speciális esetben. Belátható, hogy ha a D_1 detektor vákuumot mér, D_2 pedig 2 fotont számlál, akkor nem állítható elő az ollózás feltételét kielégítő összefonódott állapot az N_1 nyalábosztóval. Viszont ha *koincidenziát* mérünk ($d_1 = 1$ és $d_2 = 1$, a 2. módszer), akkor van megoldás.

Az előállítandó állapot (7.10) alapján:

$$|\Psi_{23}\rangle = \frac{K\sqrt{2}}{\sin 2\tau_2} e^{i(\eta_t - \eta_r)} |2, 0\rangle + \frac{K}{\cos 2\tau_2} |1, 1\rangle - \frac{K\sqrt{2}}{\sin 2\tau_2} e^{i(\eta_r - \eta_t)} |0, 2\rangle. \quad (7.13)$$

Belátható, hogy a (7.13) állapot nem állítható elő, ha N_1 bemenetének állapota $|2, 0\rangle$ vagy $|0, 2\rangle$. Viszont $|1, 1\rangle$ bemenetnél igen. Ebből N_1 a következő állapotot hozza létre:

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle \mapsto & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\tau_1 e^{i(\phi_t + \phi_r)} |2, 0\rangle + \cos 2\tau_1 |1, 1\rangle - \\ & - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\tau_1 e^{-i(\phi_t + \phi_r)} |0, 2\rangle. \end{aligned} \quad (7.14)$$

A fázistolások között a $\phi_t + \phi_r = \eta_t - \eta_r$ kapcsolatnak kell teljesülnie. Az egyszerűség kedvéért válasszuk őket nullának. Összevetve (7.13) és (7.14) együtthatóinak abszolútértékét a következőket kapjuk:

$$K = \cos 2\tau_1 \cos 2\tau_2, \quad (7.15a)$$

$$2 = \operatorname{tg} 2\tau_1 \operatorname{tg} 2\tau_2. \quad (7.15b)$$

Mivel K normálási faktor, ez valójában egyetlen egyenlet a két változó, τ_1 és τ_2 között. Ismét azt kaptuk, hogy az egyik nyalábosztó paramétere *tetszőleges* lehet, és a másiké ennek megfelelően rögzül. Ezeket célszerű úgy megválasztani, hogy a rendszer hatásfoka maximális legyen. Ehhez a $\cos^2 2\tau_1 \cos^2 2\tau_2$ függvényt kell maximalizálni a (7.15b) összefüggés figyelembevételével. Látható, hogy az optimum a $\tau_1 = \tau_2$ esetben van:

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{2} \arctg(\pm\sqrt{2}). \quad (7.16)$$

Tehát optimális esetben a két nyalábosztó *azonos*, transzmittanciájuk vagy 0,21 vagy 0,79. Az állapotlevágás hatásfoka $\frac{1}{9} (|c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_2|^2)$. Ha a $|\Phi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} c_k |k\rangle$ bemeneti állapot csak a vákuum, egy és két fotonos állapotokat tartalmazza, akkor ez a kvantumolló $\frac{1}{9}$ valószínűséggel teleportációt hajt végre. Figyelemre méltó, hogy a (7.13) állapot most is *maximálisan összefonódott*:

$$|\Psi_{23}\rangle_{\text{opt}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (|2, 0\rangle + |1, 1\rangle - |0, 2\rangle). \quad (7.17)$$

7.2.4. A $|0\rangle$ és $|2\rangle$ komponens levágása

Most egy másik speciális altérre való vetítés feltételeit keressük, a $|0\rangle$ és $|2\rangle$ komponensek levágására adunk egy módszert. Tekintsük az $n = 2$ esetet, és használjuk a B. függelék eredményeit. A (B.8) képlet alapján a levágás feltétele az, hogy D_{jk} diagonális legyen, és

$$D_{00} = \frac{K}{\beta_0}, \quad D_{11} = 0, \quad D_{22} = \frac{K}{\beta_2}. \quad (7.18)$$

Tekintsük azt az esetet, amikor a D_1 és D_2 detektor egy-egy fotont mér. Ez a 7.2.1. szakaszban megadott 2. módszernek felel meg, a D_{jj} mátrixelemeket az ott megadott módon kell kiszámítani. Ekkor az N_1 nyalábosztóval előállítandó állapot a következő (a fázistolások figyelmen kívül hagyásával):

$$|\Psi_{23}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|2, 0\rangle - |0, 2\rangle), \quad (7.19)$$

amely független az N_2 nyalábosztó τ_2 paraméterétől. Ez szimmetrikus N_1 nyalábosztóval ($\tau_1 = \pi/4$) állítható elő. A $D_{11} = 0$ feltétel határozza meg N_2 -t: $\tau_2 = \pi/4$. Az eszköz hatásfoka $K^2 = \frac{1}{4}$.

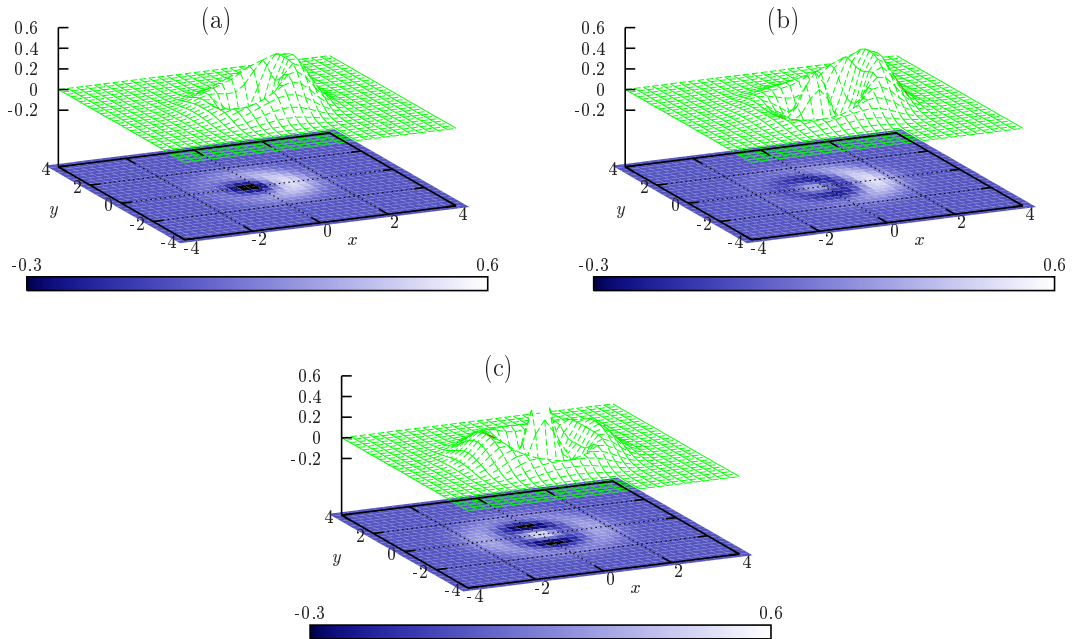
7.3. Állapottervezés levágással

A nemklasszikus fényállapotok központi szerepet töltenek be a kvantumoptikában, klasszikus állapotokból történő előállításuk olykor mégis nehézségekbe ütközik. Az irodalomban az *állapottervezésnek* két módszere terjedt el: (i) egy megfelelő kölcsönhatási Hamilton-operátor szerint valamely kezdeti állapotból unitér időfejlődéssel hozzuk létre a kívánt állapotot [25], (ii) nem unitér mérési folyamattal a kezdeti állapotot célzottan megváltoztatjuk, redukáljuk [28].

A kvantumoptikában a mérés mindig fényelnyeléssel történik (pl. fotoelektromos kölcsönhatás). A kezdeti állapoton ezért közvetve kell elvégezni a mérést: a módust egy másik módussal össze kell fonni. Az állapotlevágás során a közvetett mérést teleportációval valósítjuk meg: úgy mérjük meg az optikai módus állapotát, hogy közben teleportáljuk.

A 7.2. szakaszban bemutatott eszköz fontos szerepet tölthet be az állapottervezésben. Ha a bemenet egy $|\alpha\rangle$ koherens állapot, akkor a $|0\rangle$ és $|1\rangle$, illetve a $|0\rangle$, $|1\rangle$ és $|2\rangle$ vektorok által kifeszített altérre vetítő kvantumolló kimenetének állapota $|0\rangle + \alpha|1\rangle$, illetve $|0\rangle + \alpha|1\rangle + \alpha^2/\sqrt{2}|2\rangle$. Az α paraméter változtatásával $|0\rangle$ és $|1\rangle$ tetszőleges szuperpozíciója előállítható, és számos $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$ szuperpozíció is. A $|0\rangle$ és $|2\rangle$ állapotokat levágó kvantumolló segítségével pedig gyengén *összenyomott vákuumhoz* (3.2. szakasz (iii) pontja) nagyon közeli állapot állítható elő alternatív úton: parametrikus konverzió helyett mérési folyamat által. Az ilyen állapotok *nemklasszikus* voltát a 7.2. ábrán a Wigner-függvény negatív értékei mutatják.

A *Wigner-függvény* a kvantumállapot leírásának egy szemléletes eszköze, amely a kvantumállapottal kapcsolatos összes információt tartalmazza, és ezért a sűrűségoperátorral ekvivalens módon megfogalmazható vele a kvantummechanika [55,56]. A koordináta és impulzus fázisterén értelmezett klasszikus valószínűségeloszlás-függvény kvantumos megfelelője: kvadratikus Hamilton-operátor esetén ugyanúgy fejlődik időben, mint klasszikus párja, és egyik változójában kiintegrálva a másik változó valódi valószínűségeloszlását adja. A Wigner-függvény azonban a klasszikustól eltérően negatív értékeket is felvehet, ezért kvázivalószínűség-eloszlásnak hívják. Ezek a negatív értékek utalnak az állapot erősen nemklasszikus jellegére. Jól látható, hogy a $|0\rangle$, $|1\rangle$ és $|2\rangle$ komponenseket tartalmazó állapotban (7.2.b ábra) határozottan több a negatív rész.



7.2. ábra: Erősen nemklasszikus állapotok kaphatók a klasszikus koherens állapotokból a kvantumolló segítségével. Példánkban az $|\alpha = 2\rangle$ koherens állapot a bemenet, és az ábrán a kimenet Wignerfüggvénye látható (a) a Pegg, Phillips és Barnett-féle [53] kvantumolló esetén, (b) a $|0\rangle$, $|1\rangle$ és $|2\rangle$ állapotokat, ill. (c) a $|0\rangle$ és $|2\rangle$ állapotokat megtartó kvantumolló esetén. A kvázivalószínűség negatív értékei utalnak az állapot nemklasszikus jellegére.

A 7.2 szakaszban bemutatott összeállítás kísérletileg is *realisztikus*. Az N_1 nyalábosztó $|1,0\rangle$, illetve $|1,1\rangle$ bemeneti állapota parametrikus konverzióval előállítható (3.2. szakasz (iv) pontja). A detektoroknak csak a vákuum és az $|1\rangle$ állapotot kell megkülönböztetniük a több fotonos állapotoktól. Az ilyen detektorok hatásfoka egyelőre nagyon alacsony (3.2. szakasz vége). A konkrét kivitelezésnél a módusok időzítése is problémát jelent. Ez az $|1,1\rangle$ állapot létrehozásához felhasznált idler detektorok, valamint D_1 és D_2 négyes koincidenciájával biztosítható. Az állapotlevágás sikeressége például úgy vizsgálható, hogy az eszköz bemenetére koherens állapotú fényt bocsájtunk, a kimenetet pedig homodin detektálással [22] mérjük.

8. Összefoglalás

A dolgozatban a kvantumteleportációs sémákat, és az általuk megvalósított állapottranszformációk tulajdonságait vizsgáltuk. Az ideális teleportációs sémában Alice és Bob egy maximálisan összefonódott párt birtokol, és Alice Bell-mérést végez. Ha az felhasznált összefonódás nem maximális, vagy a mérés nem Bell-típusú, a kimenet nem pontosan egyezik meg a bemenettel. Ezt úgy is értelmezhetjük, mintha a bemeneten egy állapottranszformációt végeznénk, és az eltranszformált állapotot teleportálnánk. Ezért ezt „*teletranszformációnak*” nevezhetjük.

Általánosságban a teletranszformáció nem más, mint a bemeneti rendszeren elvégzett általánosított (POVM) mérés. A mérést azonban úgy végezhetjük el, hogy a kvantuminformáció akkor is megmarad, ha az állapot megsemmisül a detektorban. Ezért ez a módszer ígéretes lehet a kvantumállapotok tervezésében, nemklasszikus kvantumállapotok előállításában.

Az általános számításokban konjugált lineáris operátorokkal írtuk le az összefonódott állapotokat és az összetett rendszerek mérését. Ez a formalizmus lehetővé tette, hogy állításainkat általánosan, az állapottérbeli bázis rögzítése nélkül megfogalmazhassuk. Ugyanakkor az eredmények egyszerű alakját is biztosítja.

A teleportáció szempontjából fontos, hogy a kimenetből vissza lehessen állítani a bemenetet. Ha ez teljesül, a transzformáció *reverzibilis*. Beláttuk, hogy ha egy feltételes (probabilisztikus) teleportációs séma egy adott mérési kimenetel esetén reverzibilis, akkor az alábbi négy tulajdonság egyenértékű: (i) a transzformáció lineáris, (ii) az adott mérési kimenetel valószínűsége független a bemenettől, s így Alice a mérés révén nem jut információhoz a bemenet állapotáról, (iii) a transzformáció unitér operációval visszaállítható, (iv) az összefonódott állapot és az adott mérési kimenetel „*illeszkedik*” egymáshoz. Megvizsgáltuk, mikor lehetséges, hogy a mérés mindegyik kimenetele unité-

ren visszaállítható legyen: ennek feltétele, hogy a megosztott pár maximálisan összefonódott legyen, és Bell-típusú mérést végezzen Alice. Példaként egy érdekes aszimmetrikus teleportációs sémát mutattunk, ahol a bemenet kétállapotú rendszer, a kimenet viszont háromállapotú.

A nem reverzibilis sémák az állapottervezésben fontos szerepet tölthetnek be. Az „*állapotlevágás*” egy speciális irreverzibilis és bizonyos szempontból lineáris transzformáció. Ennek során egy kiszemelt altérre vetíthetjük az bemeneti állapotot. Egy optikai módus esetén a projekció történhet például a vákuum, az egy-, a két-, ... és az n fotonos Fock-állapotokra. Ezt az esetet, amivel részletesebben foglalkoztunk, „*kvantumollónak*” hívjuk.

Kidolgoztuk azt az eszközt, amelyik a $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$, illetve a $|0\rangle$, $|2\rangle$ komponensek levágására alkalmas. Ez két nyalábosztóból és két fotonszámláló detektorból áll. Az eszköz kísérletileg is realiztikus. Az összefonódott állapot előállításához szükséges $|1, 1\rangle$ állapot parametrikus konverzióval előállítható. Az egy és több fotonos állapotok megkülönböztetéséhez szükséges fotonérzékenységű detektorok konkrét kivitelezhetősége a kvantumoptika egyik kurrens területe.

Az ismertett kvantumolló az állapottervezésben is fontos jelentőséggel bírhat. Segítségével a $|0\rangle$ és az $|1\rangle$ Fock-állapot, valamint a $|0\rangle$ és $|2\rangle$ állapot tetszőleges szuperpozíciója, és számos $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$ szuperpozíció előállítható. Ezek erősen nemklasszikus állapotok, és kiindulópontul szolgálhatnak számos kvantuminformatikai protokollban.

Összességében, a kvantumteleportáció tanulmányozása hasznos a kvantum-információ-elméletben és az állapottervezésben egyaránt. Ugyanakkor segít a kvantummechanika alapjainak megértésében, mint az összefonódás és a nem-lokalitás.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetet szeretnék mondani témavezetőmnek, Janszky Józsefnek a szakmai útmutatásokért, illetve Koniorczyk Mátyásnak és Gábris Aurélnak a sok értékes megjegyzésért. A dolgozat az MTA Szilárdtestfizikai és Optikai Kutatóintézet Nemlineáris és Kvantumoptikai Osztályán és az ELTE Bolyai Kollégiumban készült.

A. Függelék

A.1. A teleportációs csatorna kiszámítása

Most levezetjük a teleportációs csatorna képletét. A jelöléseket az 5.1. ábra foglalja össze. Tiszta állapot esetén a három rendszer állapota $\Phi \otimes \sigma$. Az AB rendszeren elvégzett mérés q kimenetele esetén az új állapot a Neumann-elv szerint:

$$\begin{aligned}
 (|\sigma_q\rangle\langle\sigma_q| \otimes \hat{I}_C)(\Phi \otimes \sigma) &= \\
 &= \sum_{ij} \left(|\sigma_q\rangle\langle(L_q e_i) \otimes e_i| \otimes \hat{I}_C \right) [\Phi \otimes e_j \otimes (L e_j)] = \\
 &= \sum_{ij} \langle L_q e_i | \Phi \rangle \langle e_i | e_j \rangle \sigma_q \otimes (L e_j) = \sum_i \langle L_q^\dagger \Phi | e_i \rangle \sigma_q \otimes (L e_i) = \\
 &= \sum_i \sigma_q \otimes [L (e_i \langle e_i | L_q^\dagger \Phi \rangle)] = \sigma_q \otimes (L L_q^\dagger \Phi). \quad (\text{A.1})
 \end{aligned}$$

A továbbiakban azt az esetet vizsgáljuk, amikor a bemenet $\hat{\rho}_{\text{be}}$ sűrűségoperátora adott. A teleportáció sikerességének ellenőrzéséhez Bob elvégzi a C rendszeren egy mérést, amelynek eredménye a \mathcal{H}_C -n értelmezett \hat{Q} projektor. Ennek a valószínűsége:

$$\begin{aligned}
 p(\hat{Q}) &= \text{Tr} \left[(\hat{I}_{AB} \otimes \hat{Q})(\hat{\rho}_{\text{be}} \otimes |\sigma\rangle\langle\sigma|) \right] = \\
 &= \sum_{ij} \text{Tr} \left[(\hat{I}_{AB} \otimes \hat{Q})(\hat{\rho}_{\text{be}} \otimes |e_i\rangle\langle e_j| \otimes |L e_i\rangle\langle L e_j|) \right] = \\
 &= \sum_{ij} (\text{Tr} \hat{\rho}_{\text{be}}) \langle e_j | e_i \rangle \langle L e_j | \hat{Q} | L e_i \rangle = \sum_i \langle e_i | L^\dagger \hat{Q} L | e_i \rangle = \text{Tr}(\hat{Q} L L^\dagger). \quad (\text{A.2})
 \end{aligned}$$

Most számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy „Alice mérésének eredménye q ” és ugyanakkor „Bob mérési eredménye Q ”. A két esemény kommutálása

miatt az együttes esemény a $|\sigma_q\rangle\langle\sigma_q| \otimes Q$ projektor. A valószínűség tehát:

$$\begin{aligned}
p(\hat{Q} \wedge q) &= \text{Tr} \left[(|\sigma_q\rangle\langle\sigma_q| \otimes \hat{Q})(\hat{\rho}_{\text{be}} \otimes |\sigma\rangle\langle\sigma|) \right] = \\
&= \sum_{ijkl} \text{Tr} \left[(|L_q e_i\rangle\langle L_q e_j| \otimes |e_i\rangle\langle e_j| \otimes \hat{Q})(\hat{\rho}_{\text{be}} \otimes |e_k\rangle\langle e_l| \otimes |L e_k\rangle\langle L e_l|) \right] = \\
&= \sum_{ijkl} \langle L_q e_j | \hat{\rho}_{\text{be}} | L_q e_i \rangle \langle e_j | e_k \rangle \langle e_l | e_i \rangle \langle L e_l | \hat{Q} | L e_k \rangle = \\
&= \sum_{ij} \langle L_q^\dagger \hat{\rho}_{\text{be}} L_q e_i | e_j \rangle \langle e_j | L^\dagger \hat{Q} L e_i \rangle = \sum_i \langle \hat{Q} L e_i | L L_q^\dagger \hat{\rho}_{\text{be}} L_q e_i \rangle. \quad (\text{A.3})
\end{aligned}$$

Kihasználva, hogy

$$\hat{Q} L e_i = \sum_j \hat{Q} |e_j\rangle\langle e_j| L e_i = \sum_j \langle e_j | L e_i \rangle \hat{Q} e_j = \sum_j \langle e_i | L^\dagger e_j \rangle \hat{Q} e_j, \quad (\text{A.4})$$

így folytathatjuk:

$$\begin{aligned}
p(\hat{Q} \wedge q) &= \sum_{ij} \left\langle (\langle e_i | L^\dagger e_j \rangle) Q e_j \mid L L_q^\dagger \hat{\rho}_{\text{be}} L_q e_i \right\rangle = \\
&= \sum_{ij} \left\langle Q e_j \mid L L_q^\dagger \hat{\rho}_{\text{be}} L_q (e_i \langle e_i | L^\dagger e_j \rangle) \right\rangle = \sum_j \langle e_j | \hat{Q} L L_q^\dagger \hat{\rho}_{\text{be}} L_q L^\dagger | e_j \rangle = \\
&= \text{Tr}(L L_q^\dagger \hat{\rho}_{\text{be}} L_q L^\dagger \hat{Q}). \quad (\text{A.5})
\end{aligned}$$

A.2. A csatorna linearitása

Állítás: (Az 5.5. szakaszban felvetett probléma.) Ha az f_q teleportációs csatorna reverzibilis, akkor az alábbi három kijelentés egyenértékű:

- (i) f_q lineáris,
- (ii) a $p(q)$ valószínűség független a bemenettől,
- (iii) f_q unitéren visszaállítható.

Bizonyítás: (i) \Rightarrow (ii). Az f_q csatornát csak normált állapotokra értelmeztük, ezért a linearitás megfogalmazása kicsit körülményes:

$$f_q(\alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2) = \alpha_1 f_q(\Phi_1) + \alpha_2 f_q(\Phi_2) \quad (\text{A.6})$$

minden Φ_1, Φ_2 , ill. $(\alpha_1\Phi_1 + \alpha_2\Phi_2)$ \mathcal{H}_A -beli állapotra, amennyiben $\|\alpha_1\Phi_1 + \alpha_2\Phi_2\| = 1$. Ebben az esetben f_q egyértelműen kiterjeszthető az egész \mathcal{H}_A téren értelmezett lineáris operátorrá. Tegyük fel, hogy Φ_1 és Φ_2 lineárisan függetlenek. Ekkor (A.6) így fejthető ki:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \left(\frac{1}{\|LL_q^\dagger(\alpha_1\Phi_1 + \alpha_2\Phi_2)\|} - \frac{1}{\|LL_q^\dagger\Phi_1\|} \right) LL_q^\dagger\Phi_1 + \\ + \alpha_2 \left(\frac{1}{\|LL_q^\dagger(\alpha_1\Phi_1 + \alpha_2\Phi_2)\|} - \frac{1}{\|LL_q^\dagger\Phi_2\|} \right) LL_q^\dagger\Phi_2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Mivel f_q injektív, $LL_q^\dagger\Phi_1$ és $LL_q^\dagger\Phi_2$ is lineárisan független. Emiatt az (A.7) egyenletben a zárójelben lévő együtthatóknak el kell tűnniük. Mivel Φ_1 és Φ_2 tetszőleges volt, a $p(q)$ valószínűség független a bemenő állapottól.

(ii) \Rightarrow (iii). Tegyük fel, hogy $p(q)$ független Φ -től. Ekkor LL_q^\dagger injektív, mert egyik vektort sem képezi a 0-ba. Ennek számszorosa f_q , tehát f_q lineáris operátor (ill. kiterjeszthető lineáris operátorrá). Most belátjuk, hogy a Φ_1 és Φ_2 ortogonális állapotok LL_q^\dagger általi képe is ortogonális. Ismét legyen $\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2$ a két állapot nem triviális normált kombinációja. Ekkor:

$$\begin{aligned} \|LL_q^\dagger(\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2)\|^2 = |\alpha|^2 \|LL_q^\dagger\Phi_1\|^2 + |\beta|^2 \|LL_q^\dagger\Phi_2\|^2 + \\ + 2 \operatorname{Re} (\alpha^* \beta \langle LL_q^\dagger\Phi_1 | LL_q^\dagger\Phi_2 \rangle). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Kihasználva, hogy $\|LL_q^\dagger\Phi\|^2$ ugyanaz minden Φ -re, és $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, a következőt kapjuk:

$$0 = 2 \operatorname{Re} (\alpha^* \beta \langle LL_q^\dagger\Phi_1 | LL_q^\dagger\Phi_2 \rangle). \quad (\text{A.9})$$

Emiatt f_q skalárszorozattartó, megszorítva értékészletére pedig unitér.

A (iii) \Rightarrow (i) rész magától értetődik.

B. Függelék

A kvantumteleportációs sémában az A rendszer kezdetben (a kvantumolló esetén az 1. módus) egy ismeretlen $|\Phi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} c_k |k\rangle$ állapotban van, míg a B és C rendszer együttese egy összefonódott állapotban, amely esetünkben $|\Psi\rangle_{23}$. Az A és B rendszeren elvégzett közös mérés során — amelyet az N_2 nyalábosztó és a detektorok együttesen végeznek — a C rendszer (3. módus) állapota is megváltozik. A következőkben ezt számoljuk ki.

A jelöléseket a 7.1. ábra mutatja. Tegyük fel, hogy az N_1 nyalábosztó a következő állapotot állította elő:

$$|\Psi\rangle_{23} = \sum_{j=0}^n \beta_j |n-j, j\rangle. \quad (\text{B.1})$$

Az N_2 nyalábosztót megadó mátrixot jelöljük röviden R -rel. Hatása a következőképpen írható (3.12) alapján:

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_1^\dagger \\ \hat{b}_2^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} \\ R_{12} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_1^\dagger \\ \hat{c}_2^\dagger \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

A nyalábosztó bemeneti állapota $\sum_k \sum_{j=0}^n c_k \beta_j |k, n-j, j\rangle_b$. A $|k, n-j\rangle$ állapot az alábbi módon transzformálódik:

$$\begin{aligned} |k, n-j\rangle_b &= \frac{1}{\sqrt{k!(n-j)!}} \hat{b}_1^{\dagger k} \hat{b}_2^{\dagger n-j} |0\rangle = \\ &= \sum_{l=0}^k \sum_{m=0}^{n-j} C_{jklm} |l+m, k+n-j-l-m\rangle, \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a (B.2) összefüggést, majd a binomiális tételt, és

$$C_{jklm} = \sqrt{\frac{(l+m)!(k+n-j-l-m)!}{k!(n-j)!}} \binom{k}{l} \binom{n-j}{m} R_{11}^l R_{21}^{k-l} R_{12}^m R_{22}^{n-j-m}. \quad (\text{B.4})$$

Ezek alapján N_2 hatása után a három módus állapota:

$$\sum_k \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^k \sum_{m=0}^{n-j} C_{jklm} c_k \beta_j |l+m, k+n-j-l-m, j\rangle_c. \quad (\text{B.5})$$

Tegyük fel most, hogy a D_1 és D_2 detektor d_1 , ill. d_2 fotont számlál. Ekkor a három módus a következő állapotba „ugrik”:

$$\sum_k \sum_{j=0}^n D_{jk} c_k \beta_j |d_1, d_2, j\rangle_c, \quad (\text{B.6})$$

ahol

$$D_{jk} = \sum_{l=0}^k \sum_{m=0}^{n-j} C_{jklm} \delta_{l+m, d_1} \delta_{k+n-j-l-m, d_2}. \quad (\text{B.7})$$

A 3. módus (a kimenet) tehát a következő tiszta állapotba került:

$$|ki\rangle = \sum_k \sum_{j=0}^n \beta_j D_{jk} c_k |j\rangle. \quad (\text{B.8})$$

Jól látható, hogy a (B.7) kifejezés eltűnik azokra a j, k indexekre, amelyekre $k+n-j \neq d_1+d_2$. Egyébként az utolsó δ -függvény leghagyható. Legyen $d_1+d_2=n$. Ekkor D_{jk} diagonális, és a diagonális elemei:

$$D_{jj} = \sum_{l=0}^j \sum_{m=0}^{n-j} \delta_{l+m, d_1} \sqrt{\frac{d_1! d_2!}{j!(n-j)!}} \binom{j}{l} \binom{n-j}{m} R_{11}^l R_{12}^m R_{21}^{j-l} R_{22}^{n-j-m}. \quad (\text{B.9})$$

Irodalomjegyzék

- [1] A. Einstein, B. Podolsky és N. Rosen: *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, Phys. Rev. **47** (1935), 777–780.
- [2] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres és W. K. Wootters: *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*, Phys. Rev. Lett. **70** (1993), 1895–1999.
- [3] M. Żukowski, A. Zeilinger, M. A. Horne és A. K. Ekert: *"Event-ready-detectors" Bell-experiment via entanglement swapping*, Phys. Rev. Lett. **71** (1993), 4287–4290.
- [4] M. Horodecki, P. Horodecki és R. Horodecki: *Inseparable two spin-1/2 density matrices can be distilled to a singlet form*, Phys. Rev. Lett. **78** (1997), 574–577.
- [5] C. H. Bennett és S. J. Wiesner: *Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states*, Phys. Rev. Lett. **69** (1992), 2881–2884.
- [6] K. Banaszek: *Optimal quantum teleportation with an arbitrary pure state*, Phys. Rev. A **62** (2000), 024301.
- [7] T. Mor és P. Horodecki: *Teleportation via generalized measurements, and conclusive teleportation*, quant-ph/9906039 (1999).
- [8] S. Popescu: *Bell's inequalities versus teleportation: What is nonlocality?*, Phys. Rev. Lett. **72** (1994), 797–799.
- [9] M. A. Nielsen és C. M. Caves: *Reversible quantum operations and their application to teleportation*, Phys. Rev. A **55** (1997), 2547–2556.

- [10] Z. Kurucz, M. Koniorczyk és J. Janszky: *Perfect teleportation with partially entangled states*. Publikálatlan.
- [11] M. Koniorczyk, Z. Kurucz, A. Gábris és J. Janszky: *General optical state truncation and its teleportation*, Phys. Rev. A **62** (2000), 013802.
- [12] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu és F. Laloë: *Quantum Mechanics*, I–II. kötet, Hermann—John Wiley & Sons, Paris—New York, 1977.
- [13] Nagy Károly: *Kvantummechanika*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 3. kiadás, 1994.
- [14] L. D. Landau és E. M. Lifsic: *Kvantummechanika*, Elméleti fizika, III. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
- [15] A. Peres: *Quantum theory: concepts and methods*, Fundamental Theories of Physics, Kluwert Academic Publishers, 1993.
- [16] K. Kraus: *States, effects, and operations. Fundamental notions of quantum theory.*, Lecture Notes in Physics, 190. szám, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [17] E. G. Beltrametti és G. Cassinelli: *The logic of quantum mechanics*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Addison-Wesley, 1981.
- [18] G. W. Mackey: *The mathematical foundations of quantum mechanics*, The mathematical physics monographs series, Benjamin, New York, 1963.
- [19] Matolcsi Tamás és Székely Sándor: *Matematikai fizika I.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1975.
- [20] M. Rédei: *Introduction to Quantum Logic*, Eötvös University Press, Budapest, 1995.
- [21] M. A. Nielsen: *Quantum information theory*, Ph.D. értekezés, University of New Mexico, Albuquerque, New Mexico, USA, 1998.
quant-ph/0011036.
- [22] L. Mandel és E. Wolf: *Optical coherence and quantum optics*, Cambridge University Press, 1995.

- [23] W. Heitler: *The quantum theory of radiation*, Oxford University Press, 1944.
- [24] A. Yariv: *Quantum electronics*, John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [25] S. Y. Killin és D. B. Horoshko: *Fock state generation by the methods of nonlinear optics*, Phys. Rev. Lett. **74** (1995), 5206–5207.
- [26] J. Janszky, P. Domokos, S. Szabó és P. Adam: *Quantum-state engineering via discrete coherent-state superpositions*, Phys. Rev. A **51** (1995), 4191–4193.
- [27] P. Domokos, J. Janszky és P. Adam: *Single-atom interference method for generating Fock states*, Phys. Rev. A **50** (1994), 3340–3344.
- [28] K. Vogel, V. M. Akulin és W. P. Schleich: *Quantum state engineering of the radiation field*, Phys. Rev. Lett. **71** (1993), 1816–1819.
- [29] D. C. Burnham és D. L. Weinberg: *Observation of simultaneity in parametric production of optical photon pairs*, Phys. Rev. Lett. **25** (1970), 84–87.
- [30] L.-A. Wu, H. J. Kimble, J. L. Hall és H. Wu: *Generation of squeezed states by parametric down conversion*, Phys. Rev. Lett. **57** (1986), 2520–2523.
- [31] A. Czitrovszky, A. Sergienko, P. Jani és A. Nagy: *Measurement of quantum efficiency using entangled photons*, Laser Physics **10** (2000), 1–4.
- [32] J.-W. Pan, D. Bouwmeester, H. Weinfurter és A. Zeilinger: *Experimental entanglement swapping: entangling photons that never interacted*, Phys. Rev. Lett. **80** (1998), 3891–3894.
- [33] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter és A. Zeilinger: *Experimental quantum teleportation*, Nature **390** (1997), 575–579.
- [34] P. G. Kwiat, A. M. Steinberg és R. Y. Chiao: *High-efficiency single-photon detectors*, Phys. Rev. A **48** (1993), R867–R870.

- [35] P. Varga, Proceedings of the II. Central European Workshop on Quantum Optics, 1995, 33–35.
- [36] H. Paul, P. Törmä, T. Kiss és I. Jex: *Photon chopping: New way to measure the quantum state of light*, Phys. Rev. Lett. **76** (1996), 2464–2467.
- [37] P. Kock és S. Braunstein: *Cascading, a rosette-stone for photocounting*. Publikálatlan.
- [38] R. A. Campos, B. E. A. Saleh és M. C. Teich: *Quantum-mechanical lossless beam splitter: $SU(2)$ symmetry and photon statistics*, Phys. Rev. A **40** (1989), 1371–1384.
- [39] D. Bohm: *Quantum Theory*, Prentice-Hall, New York, 1951.
- [40] J. S. Bell: *On the Einstein Podolsky Rosen paradox*, Physics **1** (1964), 195.
- [41] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony és R. A. Holt: *Proposed experiment to test local hidden-variable theories*, Phys. Rev. Lett. **23** (1969), 880–844.
- [42] A. Aspect, J. Dalibard és G. Roger: *Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers*, Phys. Rev. Lett. **49** (1982), 1804–1807.
- [43] N. Lütkenhaus, J. Calsamiglia és K. A. Suominen: *Bell measurements for teleportation*, Phys. Rev. A **59** (1999), 3295–3300.
- [44] D. Boschi, S. Branca, F. D. Martini, L. Hardy és S. Popescu: *Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*, Phys. Rev. Lett. **80** (1998), 1121–1125.
- [45] A. Furusawa, J. L. Sorensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble és E. S. Polzik: *Unconditional quantum teleportation*, Science **282** (1998), 706–709.

- [46] R. Arens és V. S. Varadarajan: *On the concept of Einstein–Podolsky–Rosen states and thier structure*, J. Math. Phys. **41** (2000), 638–651.
- [47] M. Koniorczyk, V. Bůžek és J. Janszky: *Wigner-function description of quantum teleportation in arbitrary dimensions and continuous limit*. Publikálatlan.
- [48] J. A. Bergou, M. Hillery és Y. Sun: *Non-unitary transformations in quantum mechanics: an optical realization*, J. Mod. Opt. **47** (2000), 487–497.
- [49] M. Reck, A. Zeilinger, H. J. Bernstein és P. Bertani: *Experimental realization of any discrete unitary operator*, Phys. Rev. Lett. **73** (1994), 58–61.
- [50] B. Hladký, G. Drobný és V. Bužek: *Quantum synthesis of arbitrary unitary operators*, Phys. Rev. A **61** (2000), 022102.
- [51] W.-L. Li, C.-F. Li és G.-C. Guo: *Probabilistic teleportation and entanglement matching*, Phys. Rev. A **61** (2000), 034301.
- [52] C. H. Bennett és G. Brassard: *Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing*, Proceedings of IEEE International Conference on Computers, Systems, and Signal Processing, Bangalore, India, 1984, 175–179. IEEE, New York, 1984.
- [53] D. T. Pegg, L. S. Phillips és S. M. Barnett: *Optical state truncation by projection synthesis*, Phys. Rev. Lett. **81** (1998), 1604–1606.
- [54] S. M. Barnett és D. T. Pegg: *Phase measurement by projection synthesis*, Phys. Rev. Lett. **76** (1996), 4148–4150.
- [55] Czirják Attila: *Wigner-függvények a kvantummechanikában*, Elméleti fizikai füzetek II/1., JATE, 1995.
- [56] U. Leonhardt: *Measuring the Quantum State of Light*, Cambridge Studies in Modern Optics, Cambridge University Press, 1997.

Név- és tárgymutató

- Alice*, 20
állapot, 5
 -levágás, 39
 -tervezés, 47
 feltételes, 30
 Fock-, 12
 klasszikus, 12
 koherens, 12
 megosztott, 20, 24, 33
 nemklasszikus, 12, 47
 összefonódott, 18, 24
 szeparábilis, 18
 szinglett, 18
antilineáris operátor, 24
antiunitér operátor, 26, 27
Arens, Richard, 24
aszimmetrikus teleportáció, 36
Bell
 -állapot, 18
 -bázis, 18
 -mérés, 19, 21, 27
Bell, John S., 18
Bennett, Charles H., 20
Bob, 20
Bohm, David, 17
csatorna
 irreverzibilis, 39
 klasszikus, 19
 reverzibilis, 32
 teleportációs, 27
detektorok, 13
Einstein, Albert, 17
EPR-paradoxon, 17, 24
esemény, 3
feltétel nélküli teleportáció, 23, 34, 35
feltételes
 állapot, 30
 sűrűségoperátor, 30
 teleportáció, 23, 34, 35
fidelitás, f : megbízhatóság
fizikai mennyiség, 4
Fock
 -állapot, 12
 -bázis, 11
 -tér, 11
foton, 11
fotonszám
 -bázis, 11, 15
 -operátor, 12
Gleason, A. M., 6
klasszikus állapot, 12
koherens állapot, 12
konjugált lineáris operátor, 24
Kraus, Karl, 31
Kraus-reprezentáció, 31

kvantum
 bit, 19
 olló, 40
 teleportáció, 22
 léptető operátor, 11, 15
 lokáltság, 17
 maximálisan összefonódott, 46
 megbízhatóság, 22
 megosztott állapot, 20, 24, 33, 41
 mérés, 13
 -illesztés, 34
 módus, 10
 -függvény, 10
 nemklasszikus állapot, 12, 47
 Neumann-elv, 13, 21, 26, 29
Neumark, M. A., 8
 nyalábosztó, 15
 operátor
 antilineáris, 24
 antiunitér, 26, 27
 fotonszám-, 12
 konjugált lineáris, 24
 léptető, 11, 15
 pozitív, 8
 sűrűség-, 6, 26
 feltételes, 30
 összefonódott állapot, 18, 24
 maximálisan, 18, 26
 részlegesen, 23, 27
 összenyomott vákuum, 12, 47
 kétmódusú, 13
 parametrikus konverzió, 12
 passzív szemlélet, 29
Podolsky, Boris, 17
 POVM, 8, 31
 pozitív operátor, 8
 projektor
 felbontás, 7, 27, 29
 háló, 6
 mérték, 6
 projektormérték, 8
 qubit, *l.*: kvantumbit
 rejtett paraméter, 18
 reverzibilis csatorna, 32
Rosen, Nathan, 17
 sűrűségoperátor, 6, 26, 30
 szeparábilis állapot, 18
 szinglett állapot, 18
 teleportáció, 22
 aszimmetrikus, 36
 feltétel nélküli, 23, 34, 35
 feltételes, 23, 34, 35
 probabilisztikus, *l.*: feltételes
 teleportációs csatorna, 27
 teletranszformáció, 28, 31
 teljességi reláció, 7, 8
 üregrezonátor, 9
 vákuum, 11
 összenyomott, 12, 47
Varadarajan, Veeravalli S., 24
 Wigner-függvény, 27, 47